

VĚDECKÝ ČASOPIS

Národní
knihovna

7153/78



LESNICTVÍ

356394

NÁRODNÍ KNIHOVNA



1001044734

1

ROČNÍK 23 (L)
PRAHA
LEDEN 1977
CENA 12 Kčs

ČESKOSLOVENSKÁ AKADEMIE ZEMĚDĚL
ŮSTAV VĚDECKOTECHNICKÝCH INFORM
PRO ZEMĚDĚLSTVÍ

LESNICTVÍ

Redakční rada: člen korespondent ČSAV prof. Dr. Ing. Miroslav Vyskot, DrSc. (předseda), Ing. Zdeněk Bludňovský, CSc., prof. Dr. Ing. Václav Douša, CSc., prof. Dr. Ing. Ján Halaj, DrSc., Ing. Jan Jindra, CSc., člen korespondent ČSAV prof. Dr. Ing. Augustin Kalandra, DrSc., prof. Dr. Ing. Václav Korf, DrSc., prof. Dr. Ing. Josef Pelíšek, DrSc., prof. Ing. Adolf Priesol, DrSc., genmjr. Ing. Václav Růžička

Šéfredaktor člen korespondent ČSAV prof. Dr. Ing. Miroslav Vyskot, DrSc.

© Ústav vědeckotechnických informací pro zemědělství, Praha 1977

CS ISSN 0024-1105

LESNICTVÍ uveřejňuje vědecká pojednání o vyřešených výzkumných úkolech ze všech oborů lesnické vědy, studie a rozborů. Vydává Ústav vědeckotechnických informací pro zemědělství. Vychází měsíčně. Redakce: 120 56 Praha 2, Slezská 7, telefon 257541. Celoroční předplatné Kčs 144,—.

LESNICTVÍ публикует научные статьи о решенных заданиях по научному исследованию в области лесохозяйственной науки, обзоры и анализы. Издает Институт научно-технической информации по сельскому хозяйству. Выходит в свет ежемесячно. Редакция: 120 56 Прага 2, Слезска 7.

LESNICTVÍ publishes scientific treatises about the solved research tasks in the line of forest science, studies and analyses. Published by the Institute of Scientific and Technical Information for Agriculture. Issued monthly. Editorial office: 120 56 Prague 2, Slezská 7.

LESNICTVÍ veröffentlicht wissenschaftliche Abhandlungen über die gelösten Forschungsaufgaben auf dem Gebiete der Forstwirtschaftswissenschaft, Studien und Analysen. Herausgegeben vom Institut für wissenschaftlich-technische Information der Landwirtschaft. Erscheint monatlich. Redaktion: 120 56 Praha 2, Slezská 7.

LESNICTVÍ publie les traités scientifiques concernant les tâches de recherches résous dans le domaine de science silvicole, études et analyses. Publié par l'Institut des informations scientifiques et techniques pour l'agriculture. Paraît une fois par mois. Rédaction: 120 56 Praha 2, Slezská 7.

VODNÍ REŽIM JIHOMORAVSKÝCH LUŽNÍCH LESŮ PŘED DOKONČENÍM VODOHOSPODÁŘSKÝCH ÚPRAV ŘEKY MORAVY

K. Mráz

MRÁZ, K. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): *Vodní režim jihomoravských lužních lesů před dokončením vodohospodářských úprav řeky Moravy*. Lesnictví, 23, 1977 (1) : 1-22.

Výzkum ukázal zřetelnou souvislost mezi obsahem a vazbou vody v půdě a tloušťkovým přírůstem. Sací tlaky nad 50 kPa lze považovat za omezující přírůst. Ve zkoumaných půdách jsou rozhodující podmínky asi do 50–70 cm hloubky. Půdy, zejména spodiny, jsou velmi chudé na hrubé póry (1–2 %) i střední póry s napětím do 100 kPa (2–6 %). Výpočty evapotranspirace daly hodnoty 3,1–5,5 mm za den pro období nejvyššího přírůstu, a 1,4 mm pro období nejnižšího přírůstu do tloušťky. Z toho vyplývá, že zásoba lehce přístupné vody stačí po nasycení půdy vodou zásobovat porosty asi 1 měsíc, těžce přístupné další měsíc. Rychlost vztlínání vody z hlediska podzemní vody je už při nízkých sacích tlacích tak malá, že je pro zásobování porostů v létě bezvýznamná.

voda v půdě; sací tlak; evapotranspirace; tenziometr

Na jižní Moravě se uskutečňují rozsáhlé vodohospodářské a meliorační úpravy na zemědělských a lesních pozemcích. Cílem těchto úprav je odstranění živelných záplav, které v minulosti stále a velmi výrazně poškozovaly zejména zemědělskou produkci této velmi úrodné oblasti, ale též ostatní hospodářská odvětví a značně narušovaly i lesní provoz.

Problematika vlivu vodohospodářských úprav na lesní porosty je velmi složitá a dosavadní poznatky neumožňovaly objektivní posouzení důsledků, které tento výrazný zásah do vodního režimu krajiny přinese, zejména s ohledem na růstové podmínky lesních porostů.

Podstatou existence a vysoké produkční schopnosti lužních lesů je vedle tepelných poměrů a některých dalších půdních vlastností především bohaté zásobování vodou, které navíc přináší i živiny a sorbenty. Právě zásobování lesů vodou bude v důsledku úprav řek dotčeno.

Lužní lesy jsou zásobovány vodou vedle srážek, které jsou na jižní Moravě nedostatečné a často nepravidelně rozděleny, především z podzemní vody a záplavami. Živelné záplavy, které se až dosud opakovaly několikrát do roka, budou po úpravě řek dlouhodobě eliminovány. Úpravy se však dotknou i stavů podzemní vody, protože po napřímení koryta i bez jeho prohloubení budou vysoké stavy vody v řece a s nimi spojené vysoké stavy podzemní vody v nivě mít kratší trvání než dosud. Proto bylo nutno věnovat pozornost otázce, zda bude po úpravách voda posta-

čovat k udržení dosavadního vysokého přírůstu porostů a zda nedojde k poškození porostů.

Problém vlivu vodohospodářských úprav na lužní lesy v podobných podmínkách, jaké jsou na jižní Moravě, nebyl dosud nikde řešen. Řada prací z jižní Moravy podává sice cenné vědecké podklady o lesních fytoocenózách, jejich půdách a přírůstu (A. Mezera, J. Horák, J. Pelíšek, K. Krontorád a další), avšak neřeší danou problematiku. Ani zahraniční materiál nepochází ze srovnatelných podmínek; zpravidla jde o sledování důsledků snížení hladiny podzemní vody regulací toků nebo dolování, jako např. v Porúří. Tyto zásahy se vždy projeví vysycháním.

Průkazné stanovení změn, k nimž dojde vlivem vodohospodářských úprav, bude možné až po dokončení těchto úprav a po započítání jejich působení. Snažili jsme se proto co nej přesněji zachytit stav před dokončením úprav jednak proto, abychom mohli poskytnout podloženou prognózu pro potřeby plánování lesního provozu, jednak proto, abychom měli dostatečné podklady pro srovnání se stavem, který se vyvine po započítání působení vodohospodářských úprav; toto srovnání bude publikováno v samostatné práci.

METODIKA

V počáteční fázi výzkumu, kdy jsme neměli k dispozici moderní přístrojové vybavení, jsme zaměřili práce na 3 dílčí úseky:

1. zjištění mocnosti a zrnitostního složení holocénních náplavů v těžišti zájmového území na Lanžhotsku;
2. zjištění poměrů hladiny podzemní vody v půdě ve srovnání s hladinami měřenými v hydrologickém profilu Hydrometeorologického ústavu (HP 222 Lanžhot);
3. zjištění obsahu přístupné vody v půdě v časovém průběhu, rovněž na Lanžhotsku.

Průzkum mocnosti a zrnitostních poměrů holocénních náplavů na Lanžhotsku vykonal podle našich směrnic Geotest v Brně. V polesích Tvrdonice a Lanžhot na ploše asi 10 km² bylo vyhloubeno 55 vpichů o celkové metrži 250,9 m. Odběr vzorků po 0,25 m hloubky dal 795 vzorků pro granulometrický rozbor. Kromě toho byly využity i dřívější práce.

Ke zjištění poměrů hladiny podzemní vody jsme na 3 lokalitách podél profilu HP 222 založili plochy s rourami, zapuštěnými do menších hloubek než roury tohoto profilu, které sahají až do štěrkopískového podloží. Hladiny byly měřeny týdně a výsledky srovnávány s výsledky měření HP 222, za jejichž poskytnutí děkujeme HMÚ v Brně, zejména Ing. Sommerovi, CSc.

Vlhkost půdy jsme zjišťovali gravimetricky (po vysušení); vzorky jsme odbírali 2 až 4krát měsíčně na plochách, kde se měřila hladina podzemní vody.

Fyzikální vlastnosti půdy byly stanoveny běžnými metodami.

Ve druhé fázi výzkumu jsme po získání moderního přístrojového vybavení zaměřili práce na další úseky:

4. měření potenciálu vody, resp. sacího tlaku vody v půdě;
5. stanovení propustnosti půdy, retenčních křivek a dalších fyzikálních hodnot;
6. výpočet rychlosti pohybu vody v půdě;
7. tloušťkový přírůst během vegetačního období.

Měření sacího tlaku vody v půdě je výhodná metoda, protože umožňuje kontinuální měření bez narušování půdy odběry vzorků, je přesná a poskytuje podklady jak pro posouzení dostupnosti vody rostlinám, tak i pro výpočet gradientu,

hydraulické výšky a rychlosti pohybu vody v půdě, což je velmi významné pro výpočet zásobování porostů vodou, zejména pro posouzení množství vody vzhlínající z hladiny podzemní vody.

Sací tlak (někdy označován také jako savé napětí) půdy jsme měřili pomocí tenziometru, které jsme sami vyráběli. Tenziometr je nevhodnější a prakticky jediný přístroj, umožňující přímé měření potenciálu vody, resp. sacího tlaku v terénu. Ačkoliv je princip tenziometru znám už dlouho, vytvořil teprve podrobný popis a fyzikální definice jeho charakteristik Richardsem (1949) předpoklady pro jeho praktické a exaktní využití. V USA se od té doby konají tenziometrická měření ve výzkumu i praxi. Teprve o 20 let později došlo v Evropě k aplikaci tenziometru v širším měřítku při výzkumu vodního režimu lesních půd ve Švýcarsku (A. Brühart 1969 a v NSR (P. Benecke 1972). V ČSSR jich využívá VÚ závlahového hospodářství a VÚ meliorací. U nás dosud bylo o výsledcích použití tenziometru publikováno málo, kromě našich stručných závěrů pro praxi (K. Mráz 1973).

Konstrukce námi použitých tenziometru se v podstatě shoduje s konstrukcí, jaké používá švýcarský lesnický výzkumný ústav v Birmensdorfu u Curychu. Za umožnění podrobného poznání konstrukce tenziometru a metody práce s nimi děkují prof. Dr. Leibundgutovi a prof. Dr. F. Richardovi. Tenziometr tohoto typu je otevřený systém, skládá se z trubice z umělé hmoty, vyplněné od vzdušné vodou; na jejím dolním konci je keramické tělísko, které umožňuje výměnu vody mezi tenziometrem a půdou, ale nepropouští až do napětí okolo 100 kPa (80–90 kPa = 0,8 – 0,9 baru) vzduch. Proto může při odsávání vody půdou z tenziometru vzniknout v tenziometru podtlak, který se měří vakuometrem, resp. manometrem. Přesný manometr zde představuje kapilára z umělé hmoty, která je vzduchotěsně napojena na horní konec trubice tenziometru a dolní konec kapiláry je ponořen do nádoby se rtutí, jejíž vzestup v kapiláře ukazuje (po přepočtu s ohledem na měrnou hmotnost rtuti a vody a další hodnoty) přesně potenciál vody, resp. sací tlak.

Měli jsme značné potíže s opatřením vhodných tuzemských materiálů pro výrobu tenziometru. Hlavním problémem bylo získání vhodných keramických tělísek, která musejí vyhovovat výše zmíněným požadavkům. Za pochopení děkujeme družstvu Keramo v Praze, zejména hlavnímu technologovi Ing. Košákovvi, který vyvinul směs keramické hmoty požadovaných vlastností i odpovídající technologii výroby.

K měření sacího tlaku jsme založili 3 výzkumné plochy, a to jednu v poli Lanžhot, druhou v poli Moravská Nová Ves, obě na jílovité zemině v typu dubových jaseňin (*Querceto-Fraxinetum*) na gleji; třetí rovněž v poli Moravská Nová Ves, ale na písčitém hrůdu. Tenziometry byly zasazeny do hloubek 20, 50, 100 a 150 cm, vždy v několika opakováních. Pozorovatelé odečítali a zapisovali měřené hodnoty jednou, později dvakrát týdně během vegetačního období.

Propustnost půdy, resp. filtrační koeficient, jsme stanovili v laboratoři na přístroji s konstantním rozdílem hladin, desorpční křivku v tlakovém membránovém přístroji, pro nižší tlaky v tlakovém hrnci s keramickými deskami.

Rychlost a směr pohybu vody v půdě jsme počítali z hodnot, získaných měřením sacího tlaku postupem, který podrobně zdůvodnil Brühart (1969).

Tloušťkový přírůst porostů jsme měřili na stejných plochách jako sací tlak a ve stejných intervalech pomocí dotykového úchylkoměru s přesností na setiny mm.

Rhizologický výzkum uskutečnil na plochách v Lanžhotě A. Šika monolitovou metodou; výsledky jsou uvedeny v závěrečné zprávě úkolu R-VII-20 (VÚLHM 1972).

Analýzu přírůstu letokruhovou metodou provedl B. Vinš; zhodnocení vztahů ročních přírůstů a vodního režimu, zejména s ohledem na záplavy, uvádějí K. Mráz a B. Vinš (1973).

VÝSLEDKY VÝZKUMU

MOCNOST A ZRNITOSTNÍ POMĚRY HOLOCÉNNÍCH NÁPLAVŮ MORAVY

Holocénní povodňové hlíny představují materiál, ze kterého se vyvinuly půdy lužních lesů. Z podrobného průzkumu Geotestu vyplývá, že jde o jíl nebo hlíny s celou škálou mezilehlých zrnitostních variant. Méně časté jsou písky, převážně zahliněné, které vytvářejí zpravidla jen

čočkovitě vyklínající plochy. Pro souvrství je charakteristická rychlá proměnlivost zrnitosti, daná vznikem. Průměrná mocnost souvrství povodňových hlín je 4,5 m, kolísá od 0,0 m (lokálně) do 5 m i více.

Hydrologické vlastnosti hornin v nivě Moravy jsou dány genezí a geologickou pozicí. Podložní neogenní jíly jsou prakticky nepropustné. Nejdůležitější je proto pro nás zvodnění štěrkopískových vrstev údolní terasy, na níž leží povodňové hlíny. Tyto zvodnělé vrstvy jsou průlinově propustné, při vyšších stavech vody v řece infiltruje říční voda do štěrkopískových sedimentů terasy a v době malých průtoků je voda v řece doplňována podzemní vodou. Podzemní voda je držena pokryvem povodňových hlín v mírném napětí.

KOLÍSÁNÍ HLADINY PODZEMNÍ VODY V PŮDNÍCH PROFILECH LUŽNÍCH LESŮ VE SROVNÁNÍ S KOLÍSÁNÍM V PIEZOMETRECH HYDROLOGICKÉHO PROFILU HP 222

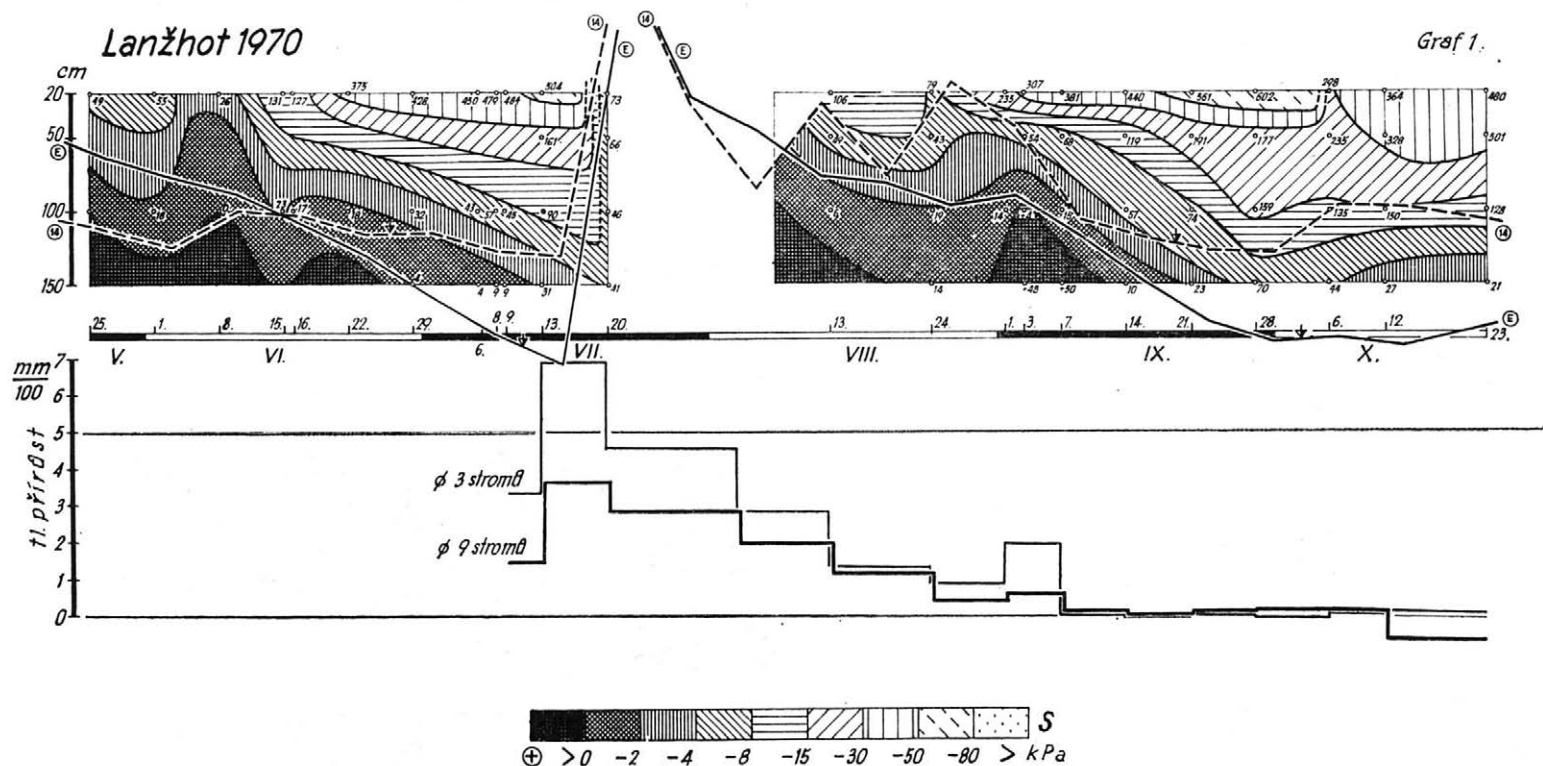
Jelikož rourové sondy k měření hladiny podzemní vody v profilu HP 222, založeném HMÚ v Brně (profil Lanžhot-Kúty), jsou jílovitou zeminou dobře utěsněny, fungují jako piezometry, tj. měří hydrostatický tlak v štěrkopískovém materiálu terasy. Proto stavy v těchto rourách neodpovídají stavům hladiny podzemní vody v půdě, které jediné mají význam z hlediska růstu lesa. Voda ve štěrkopísku je tedy za vyšších stavů v řece pod tlakem a její výstup do rourových sond připomíná chování artéské vody. Vzhledem k nízkému koeficientu hydraulické vodivosti jílovitých zemín však postupuje do půd jen velmi pomalu.

Naše měření v polesí Lanžhot (Mráz 1973) ukázalo, že časový průběh stavů hladin v půdě vykazuje daleko menší kolísání než v piezometrech HP 222 a tedy i v řece; maxima obvykle sice časově souhlasí, zejména v provlhčené půdě, ale v půdě jsou podstatně nižší než v piezometrech. V půdě s malým obsahem vody (obvykle v létě a na podzim) se maxima v půdě o několik dní opožďují nebo se vůbec neprojeví. Naopak po záplavě klesá hladina v piezometrech HP 222 velmi rychle, zatímco se v půdě udržuje dlouho.

OBSAH VODY V PŮDĚ A JEHO ČASOVÝ PRŮBĚH

Vlhkost půdy jsme měřili během vegetačního období 1969 na dvou plochách v polesí Lanžhot v dubové jasanině na jílu. Na vlhčí ploše po květnové záplavě a nasycení profilu vodou povrchové vrstvy vysychaly, zatímco pod 50 cm hloubky byla půda nasycena do poloviny července, spodiny do konce července. Ani při dalším vysychání nedosáhla vlhkost hranice rostlinám přístupné vody (dvojnásobná hygroskopičnost); jen v hloubce 35 cm byla tato hranice začátkem srpna a koncem září překročena. Spodina byla i na podzim zřetelně vlhčí než povrchové vrstvy.

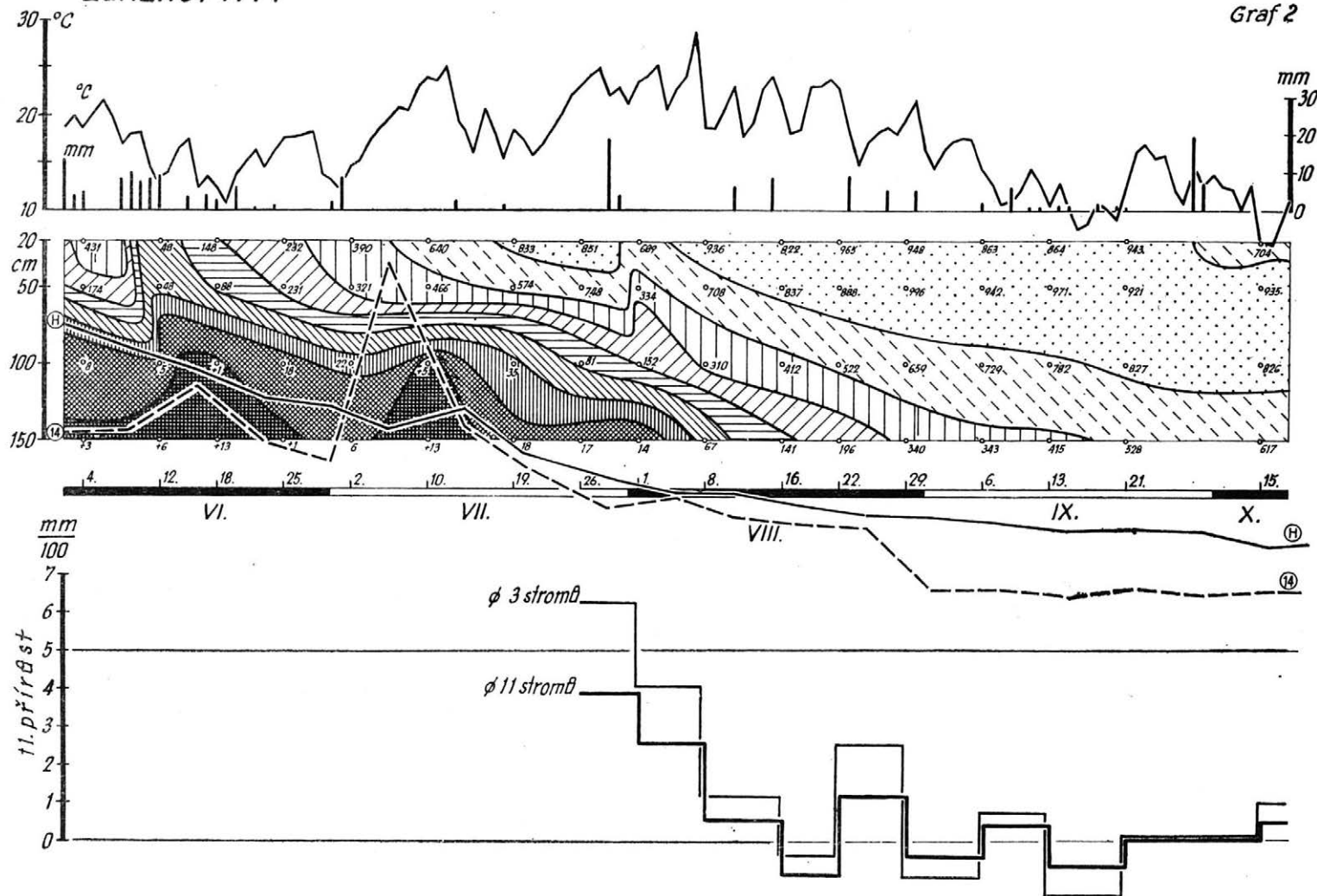
Sušší plocha je položena poněkud výše a mocnost jílového pokryvu je zde podstatně větší; je zřetelně vysychavější a méně závislá na podzemní vodě, zato více na záplavách. Nasycení půdy vodou po záplavě v květnu trvalo v povrchových vrstvách do začátku, ve spodině do konce července; jen v hloubce mezi 25 a 100 cm došlo koncem května a v červnu k vysychání (vliv uzavřeného vzduchu při záplavě). Koncem července a v srpnu zde velmi výrazně vyschla vrstva v hloubce 30 cm, kde už



1-5. Znázornění průběhu hodnot sacího tlaku S (resp. potenciálu) formou chronoizopleth během vegetačního období 1970–1972 na plochách v Lanžhotě a Moravské Nové Vsi na jílovitém podkladu. (Na ose x je čas, na ose y hloubka v půdním profilu, hodnoty sacího tlaku udávají šrafy, stupnice je v dolní části grafu.) V horní části grafu jsou srážky (mimo les) a teplota. Ve spodní části je lomenou čarou znázorněn průběh tloušťkového přírůstu (v setinách mm za den). Lomené čáry, označené E , H , 14 vyjadřují průběh výšky hladiny podzemní vody měřený v Lanžhotě. — Course of suction pressure values S in the form of chronoisopleths during the vegetation period 1970–1972 on the clay soil in Lanžhot and Moravská Nová Ves. (Time is on the axis x , depth in a soil profile is on the axis y , values of suction pressure are dashed and the scale is at the bottom of a graph). Precipitation and temperature are in the upper part of the graph. Course of the diameter increment (in hundredths of mm per day is expressed by broken line. Broken lines E , H , 14, express the course of groundwater table measured in Lanžhot.

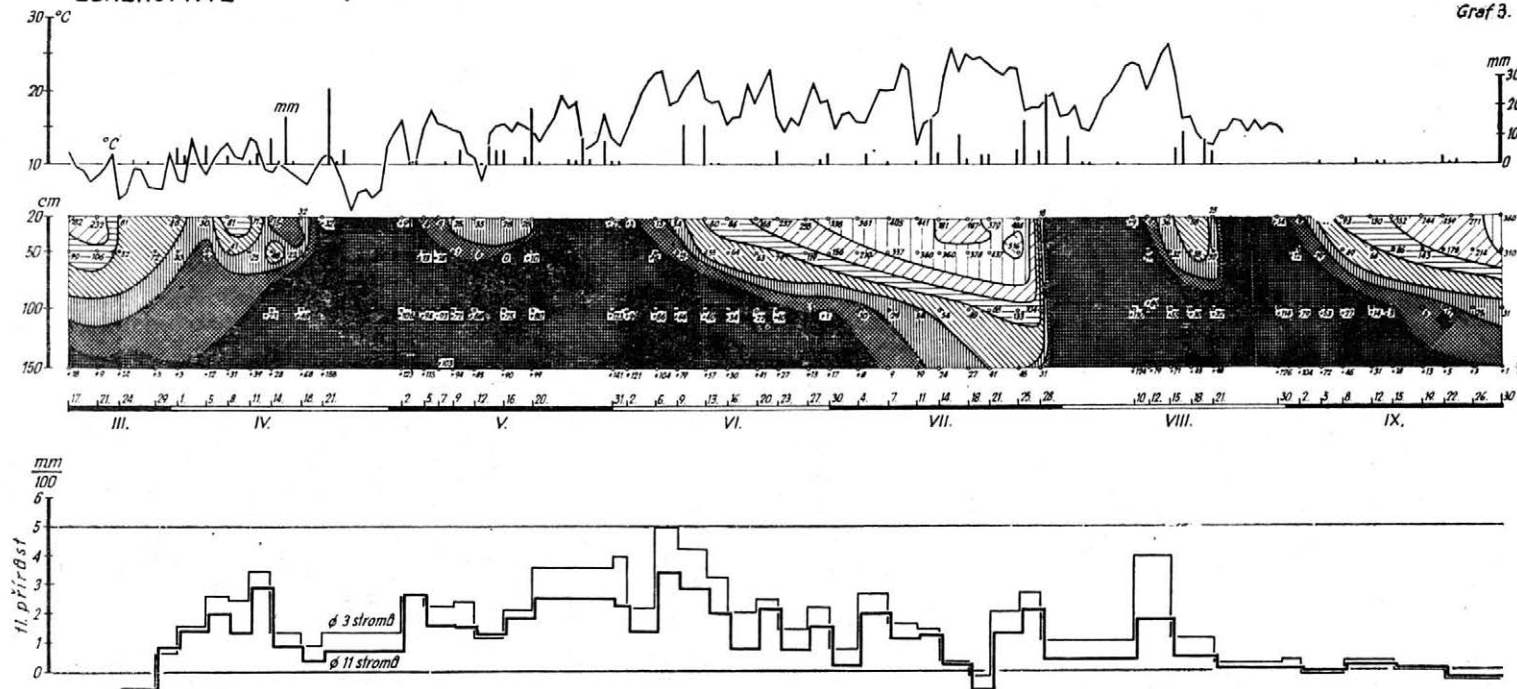
Lanžhot 1971

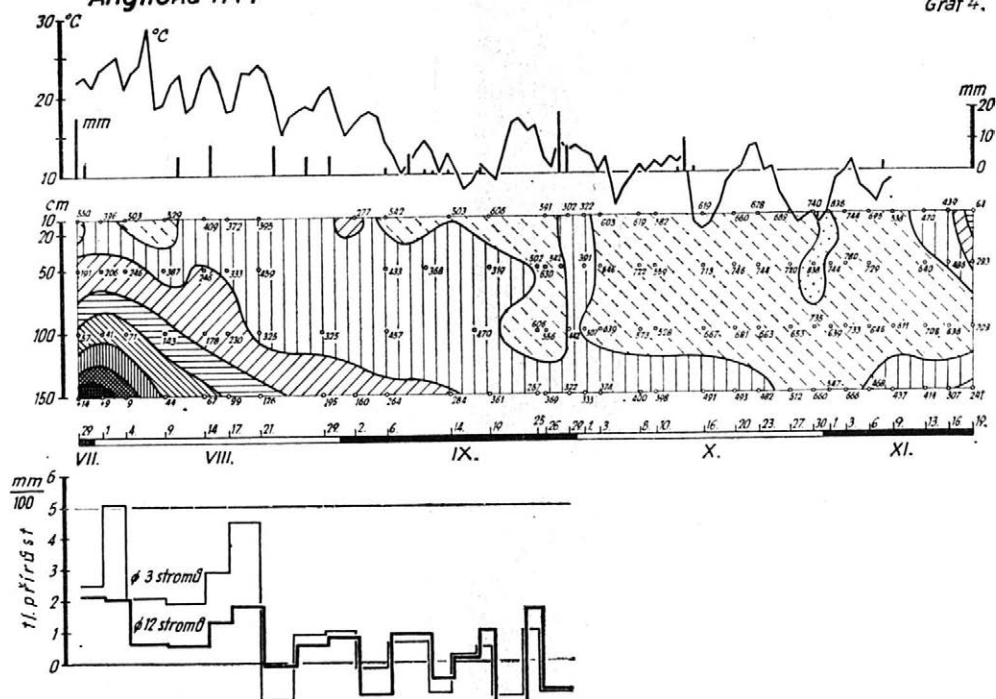
Graf 2



Lanžhot 1972

Graf 3.





nebyla rostlinám přístupná voda. Od konce července byl obsah vody v profilu do 1 m hloubky převážně tak nízký, že zde nebyla rostlinám přístupná voda.

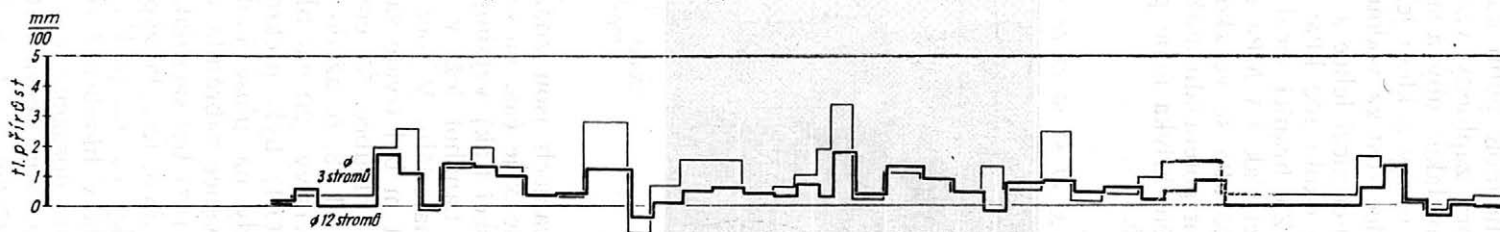
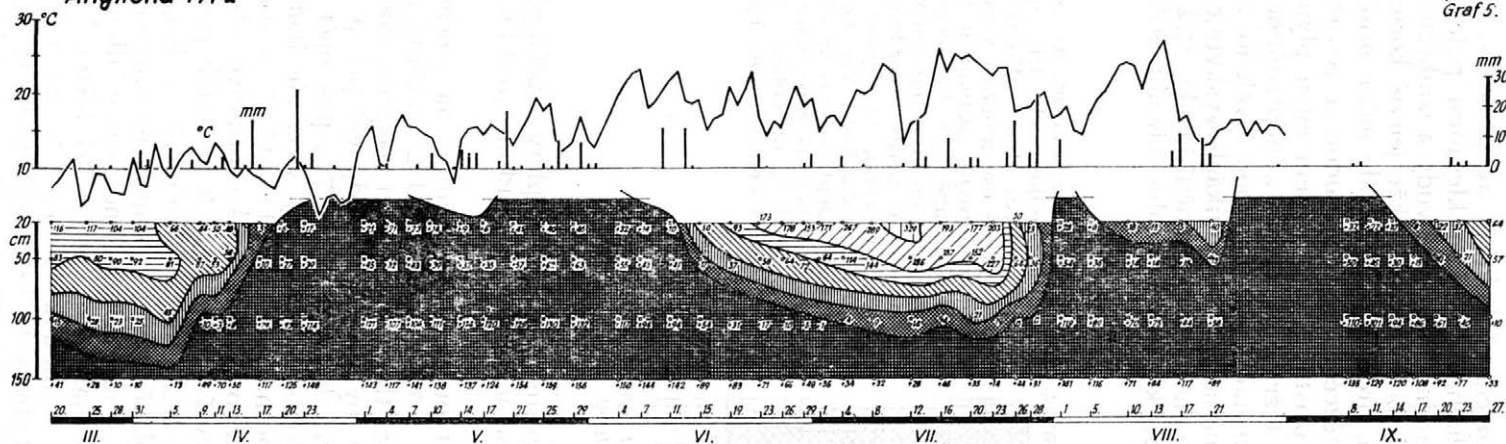
PRŮBĚH HODNOT POTENCIÁLU VODY (RESP. SACÍHO TLAKU)

Pomocí tenziometrů v různých hloubkách měřené hodnoty potenciálu v cm Hg (rtuťového sloupce) byly přepočteny na cm HOH (vodního sloupce), které jsou uvedeny i v diagramech (1 cm HOH odpovídá přibližně 0,001 atm nebo 1 mb a tedy 0,1 kPa; 1 bar = 0,987 atm = 1017 cm HOH = 0,1 MPa). Jde o maticí potenciál (kapilární potenciál), který je rovný negativnímu maticímu tlaku (R. O. Slatyer 1967). Ostatní složky potenciálu (osmotický, pneumatický) jsou v našich podmínkách zanedbatelné. Záporné hodnoty potenciálu jsou v nenasycené půdě (odpovídající kladné hodnoty se zde označují jako své napětí nebo sací tlak). Kladné hodnoty potenciálu (pod hladinou vody) představují hydrostatický tlak (tlak vodního sloupce).

Hodnoty potenciálu jsou potřebné pro výpočty gradientu a rychlosti pohybu vody v půdě, jsou však cenné i pro ekologické hodnocení stanovišť, protože lépe než hodnoty obsahu vody v půdě ukazují možnosti zásobování rostlin vodou, jelikož vyjadřují pevnost vazby vody v půdě a tedy i její přístupnost a pohyblivost.

Od nasycení půdy vodou (sací tlak 0,0 Pa) při postupném odtékání vody z nekapilárních pórů vlivem gravitace (gravitační vody) stoupá

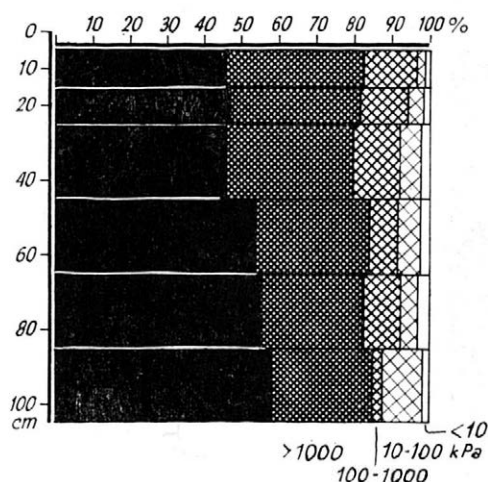
Anglická 1972



sací tlak k hodnotě polní kapacity (okolo 10 až 20 kPa), kdy jsou nekapilární póry zaplněny vzduchem. Dalším klesáním potenciálu (stoupáním sacího tlaku) ubývá snadno přístupné vody a souběžně s tím roste pevnost její vazby a klesá její pohyblivost, takže jemné kořínky jsou nuceny stále více růst za vodou, protože k nim stále méně přitéká.

Za hranici mezi lehce a těžce přístupnou vodou se považuje hodnota sacího tlaku okolo 100 kPa; přístupnost se ovšem mění plynule, hranice není ostrá. Za hranici mezi těžce přístupnou a nepřístupnou vodou se považuje sací tlak 1,5 MPa označovaný jako bod trvalého vadnutí. Sací tlak přes 100 kPa se ve zkoumaných podmínkách vyskytuje jen zřídka.

Z hodnot potenciálu můžeme pomocí retenční křivky (též označované jako desorpční křivka nebo pF křivka) kdykoliv odvodit přibližný obsah vody v půdě.



6. Grafické znázornění rozdělení pórů podle velikostních tříd (podle napětí) v jílovitém gleji v Moravské Nové Vsi. Na svislé ose hloubka v půdním profilu, na vodorovné zastoupení pórů s vyznačeným napětím v % objemu. Černě znázorněna pevná půdní hmota. — Graphic survey of pores according to size classes (according to tension) in clay gley in Moravská Nová Ves. On vertical axis there is depth of soil profile, on horizontal one there is pore representation with expressed % of volume. The solid soil matter is demonstrated by black colour

V diagramech jsou znázorněny chronoizoplety (izočáry) potenciálu vody; na ose x je čas, na ose y hloubka v půdním profilu, ke které se potenciál (sací tlak) vztahuje.

Plocha Lanžhot leží v typu dubové jasaniny na mocném pokryvu jílovitého materiálu. V roce 1970 se měřilo od 25. května do 20. října. V hloubce 1 m byl trvale sací tlak odpovídající nasycení vodou až polní kapacitě. V hloubce 50 cm byla hodnota odpovídající polní kapacitě překročena od 28. 6. až do záplavy (20.–29. 7.), pak opět po 17. září. Povrchové vrstvy (20 cm hloubky) vysychaly více, ale hodnota 50 kPa (500 cm HOH) byla překročena jen mezi 11.–17. 7. a po 17. 9. Rok 1970 se tedy na ploše Lanžhot projevil jako příznivě vlhký, záplava koncem července zabránila vysychání, byl stále dostatek přístupné vody.

V roce 1971 byl sací tlak měřen od 2. 6. do 9. 11. (v diagramu znázorněn průběh do 8. 10.). Po záplavě koncem dubna podzemní voda klesla pod 1 m hloubky 14. 6., pod 1,5 m 18. 7. Téměř stejně dlouho byla (do 20. 7.) půda v hloubce 1 m nasycena vodou. Při bližší hodnoty polní kapacity bylo dosaženo v 1 m hloubky 1. 8., v 50 cm už 24. 6. vzdor deštům na začátku června. Hodnoty 80 kPa (800 cm HOH) bylo dosaženo v hloubce 20 cm 17. 7., v 50 cm 12. 8., v 1 m 17. 9. v hloubce 50 cm,

kteřá je patrně vzhledem k rozložení jemných kořinek pro zásobování porostů rozhodující, se tedy lehce přístupná voda udržela asi 2 měsíce od nasycení půdy vodou; ale už o měsíc dříve zde byly hodnoty okolo 50 kPa, které znamenají již podstatné omezení.

Maxima hladiny podzemní vody v půdě, zjištěná naší sondou H, se opoždovala proti sondě 14 HP 222 o 8 dní a zůstávala asi o 1 m níže stejně jako v roce 1970; průběh byl v souladu s hodnotami sacího tlaku. Rok 1971 se zde tedy jevil jako „normální“, celkem dosti příznivý; vzhledem k tomu, že po dubnové záplavě se již další záplava nedostavila, došlo k výraznému vysýchání už začátkem července.

V roce 1972 probíhalo měření od 17. 3. do listopadu. Ve vegetačním období byly 4 záplavy, podzemní voda se udržovala vysoko. Prakticky jen během 7 týdnů v červnu nebyl pro dřeviny tak důležitý prostor v hloubce okolo 50 cm nasycen vodou; sací tlak přesáhl 30 kPa jen po dobu 3 týdnů a 50 kPa jen po 3 dny. Rok 1972 byl tedy co do půdní vlhkosti mimořádně mokrý.

Plocha Moravská Nová ves — Anglická leží rovněž v typu dubové jasaniny na jílu, jehož pokryv je menší mocnosti než v Lanžhotě a hladina podzemní vody je zde v průměru vyšší.

Sací tlak se zde měřil v roce 1971 od 29. 7. do 20. 11. Záplava byla v polovině července. Sací tlak v hloubce 50 cm přesáhl 30 kPa 15. 8., 50 kPa 24. září. Je vidět, že červencová záplava udržela příznivou vlhkost dlouho do pozdního léta. Rok 1971 zde tedy byl „normální“, příznivý, k silnějšímu vyschnutí došlo až na podzim.

V roce 1972 (měřeno od 20. 3. do listopadu) měla být plocha již chráněna hrázemi před záplavami a měla představovat srovnání s ještě zaplavovanou plochou v Lanžhotě. Namísto toho došlo i zde ke katastrofálním záplavám 23. 4.—9. 5., 19. 5.—7. 6., 31. 7.—4. 8. a 24. 8. až 12. 9., z nichž zejména poslední dvě byly mimořádně silné. Podzemní voda byla v hloubce 50 cm od 16. 4. do 14. 6. a od 31. 7. do 19. 9.; v této hloubce nebyla půda nasycena vodou jen po 6 týdnů v červnu až červenci, ale sací tlak sotva přesáhl hodnotu polní kapacity, takže bylo nutno počítat s trvalým nedostatkem vzduchu v půdě. Rok 1972 zde tedy byl mimořádně mokrý, ještě výrazněji než v Lanžhotě.

Plocha Moravská Nová Ves — Melasín v typu habro-jilmové jasaniny na písčitém hrůdu, nezaplavovaném, na vyvýšené lokalitě v blízkosti předchozí plochy byla založena pro srovnávání na tomto zcela odlišném substrátu, který je v jihomoravských lužních lesích ve srovnání s jílovitými zeminami zastoupen jen nepatrně.

Sací tlak zde dosahoval jen podstatně nižších hodnot než v jílovitých zeminách ostatních ploch, hodnota 30 kPa (asi 300 cm HOH) byla překročena v roce 1971 jen v povrchové vrstvě (10 cm), mezi 19. zářím a 2. říjnem. Podzemní voda v tomto roce vůbec nevystoupila do sledovaného půdního prostoru (mocnosti 1,5 m).

V roce 1972 byla podzemní voda v hloubce 1 m od 23. 4. do 11. 5., od 20. 5.—13. 6. a od 27. 8. do 6. 9. Ve všech sledovaných hloubkách byla půdní vlhkost příznivá, sací tlak 1–8 kPa (10–80 cm HOH) a přibližné hodnoty polní kapacity bylo dosaženo jen koncem června a v červenci. Rok 1972 se zde tedy projevil jako příznivě vlhký.

Propustnost půd pochopitelně plošně i do hloubky velmi značně kolísá, a proto jsou pro uvažované větší plochy území reprezentativní jedi-
ně na větší ploše konané, a tím i nákladné vsakovací zkoušky. Byli jsme
proto nuceni se spokojit jen s laboratorním stanovením, popř. s terénním
měřením hrncovým dvojitým infiltrometrem.

Podstatně důležitější jsou výsledky velkoplošných vsakovacích zkou-
šek ze zájmového území, za jejichž sdělení děkujeme doc. Ing. V. Hál-
kovi, DrSc., z Vědeckého ústavu vodního hospodářství Vysoké školy
technické v Brně: $k_f = 1,0 - 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ nebo v přepočtu $k_f = 1,0$
až $5,0 \cdot 10^0 \text{ cm}$ za den.

Naše výsledky souhlasí s tímto reprezentativním velkoplošným zjiš-
těním. K dobrým výsledkům přispěl patrně způsob odběru vzorků, který
se děl ve smyslu poznatků, které získali W. Müller, M. Renger
a P. Bencke (1970) horizontálně. Jako například uvádíme hodnoty
ze základní plochy s tenziometry v Lanžhotě (tabulka I).

PROPUSTNOST PŮDY, ZASTOUPENÍ VELIKOSTNÍCH TŘÍD PÓRŮ A DALŠÍ FYZIKÁLNÍ HODNOTY

Propustnost celého půdního profilu určité plochy pochopitelně určuje
minimální hodnota propustnosti v profilu půdy, v našem případě je to
0,4 cm za den (0,2 až 0,5 cm za den) v hloubce 100–105 cm; je vidět,
že je velmi blízká hodnotám zjištěným z velkoplošných vsakovacích
pokusů.

I. Propustnost (koeficienty hydraulické vodivosti nasycené půdy k_f) půdního profilu
v Lanžhotě. — Permeability (coefficients of hydraulic conductivity of the saturated
soil k_f) of a soil profile in Lanžhot

Hloubka cm	Objemová hmotnost g cm^{-3}	k_f (průměr) cm za den	k_f (rozpětí) cm za den
0– 5	0,38	1218,2	872,5–1565,0
10– 15	1,12–1,14	32,5	0,3– 11,50
20– 25	1,44–1,46	5,7	0,1– 11,7
25– 30		19,7	18,8– 20,6
30– 35	1,53–1,54	4,5	3,3– 5,7
40– 45	1,64–1,66	0,5	0,3– 1,0
50– 55	1,64	1,3	0,2– 2,2
70– 75	1,71–1,72	0,7	0,4– 0,9
100–105	1,70–1,71	0,4	0,2– 0,5
135–140	1,95–1,97	8,4	7,6– 9,2

Z tabulky I je vidět, že propustnost (hydraulická vodivost) povrchov-
ých humózních horizontů je asi o 1 až 3 řády vyšší než propustnost
spodin, což vysvětluje, proč srážková nebo záplavová voda rychleji na-
sytí půdy než krátkodobý vzestup podzemní vody (viz diagramy).

Uvedené hodnoty koeficientu hydraulické vodivosti jsou ovšem hod-
noty tzv. filtračního koeficientu k_f , které ukazují propustnost půdy v na-

syceném stavu; není-li půda nasycena vodou, klesá koeficient hydraulické vodivosti k_s (pro nenasyčenou oblast) rychle se stoupajícím sacím tlakem S . Určení k_s je velmi obtížné, časově náročné a vyžaduje složité aparatury. Je možno ho odvodit z retenční křivky např. podle Marshalla postupem, který navrhl Semotán (1973). Jinak je možno využít křivek stanovených pro půdy podobné zrnitosti Podle Brülharta (1969) klesá k_s v jílovité zemině proti k_f přibližně takto:

růst S z $S = 0$ (nasycení) na	pokles k_s vůči k_f o
$S = 1$ kPa	2 řády
10 kPa	3 řády
40 kPa	4 řády
100 kPa	5 řádů

Je-li tedy v Llanžhotě v hloubce 100–105 cm $k_f = 4$ mm za den, pak již při malém sacím tlaku 1 kPa klesá koeficient hydraulické vodivosti (nenasyčený) k_s na asi 0,04 mm za den, při vlhkosti odpovídající polní kapacitě okolo 10 kPa na asi 0,004 mm za den.

PÓROVITOST A ZASTOUPENÍ VELIKOSTNÍCH TŘÍD PÓRŮ

Jsou to velmi důležité hodnoty, protože ukazují, kolik vody může půda pojmout, a to odděleně podle stupně dostupnosti pro rostliny: voda

II. Hodnoty desorpční (retenční) křivky pro půdu na ploše Moravská Nová Ves - Anglická a zastoupení velikostních tříd pórů. — Values of desorption (retention) curve for the soil in the area of Moravská Nová Ves - Anglická and pore classes representation

Hloubka cm	Obsah vody (% objemu) při sacích tlacích (v kPa)				
	0,1	1,0	10,0	100,0	1000,0
10	53,7	53,5	52,5	50,5	36,2
20	53,0	52,5	51,0	47,5	34,2
40	53,2	53,2	51,0	45,0	33,0
60	46,0	45,7	43,7	37,5	30,5
80	44,7	44,0	42,0	37,2	27,5
100	42,0	42,0	40,0	29,5	27,0
Hloubka cm	Zastoupení velikostních tříd pórů (v % obj.) s napětím (kPa)				
	hrubý 0,1–10	střední I 10–100	střední II 100–1000	jemné nad 1000 kPa	
10	1,2	2,0	14,3		36,2
20	2,0	3,5	13,3		34,2
40	2,2	6,0	12,0		33,0
60	2,3	6,2	7,0		30,5
80	2,7	4,3	9,7		27,5
100	2,0	10,5	2,5		27,0

gravitační, bez napětí, zcela volná, odtékající z hrubých pórů vlivem gravitace při sacím tlaku mezi 0,00 až asi 10–20 kPa; voda lehce přístupná ve středních pórech I. skupiny (do sacího tlaku 100 kPa); voda těžce přístupná ve středních pórech II. skupiny (0,1–1,5 MPa) a konečně voda nepřístupná v jemných pórech o napětí nad 1,4 MPa. Tyto hranice ovšem nejsou ostré, pevnost vazby roste a přístupnost klesá s rostoucím sacím tlakem plynule. Jde o konvenčně stanovené meze, které však umožňují názornou představu.

Zastoupení velikostních tříd pórů (tříd podle napětí, kterým váží vodu) vyplývá z desorpční (retenční) pF-křivky, kterou jsme stanovili pomocí tlakového membránového přístroje podle Richardse v modifikaci podle Vetterleina (1959). Jde v podstatě o stanovení vztahu mezi potenciálem vody (resp. sacím tlakem) a obsahem vody v půdě. V tabulce II jsou hodnoty pro plochu Moravská Nová Ves – Anglická, za jejichž stanovení děkujeme prof. Ing. M. Kutílkovi, DrSc., vedoucímu pracoviště vodohospodářské pedologie ČVUT v Praze.

Je vidět, že hrubých pórů je velmi málo, s čímž souvisí i velmi malá vzdušnost zdejších půd. Středních pórů I. skupiny je málo, II. skupiny je sice více, ale rovněž málo; vysoký je obsah jemných pórů, jejichž voda je rostlinám nepřístupná. Z uvedených čísel je možno odvodit zásobu vody (v mm neboli v l na 1 m²), kterou je schopna pojmout 1 m mocná vrstva půdy; při plném nasycení je to 479 mm, z toho je 22 mm voda gravitační, jen 60 mm lehce přístupná a 90 mm těžce přístupná.

RYCHLOST POHYBU VODY V PŮDĚ

Rychlost pohybu vody v půdě nás zajímala hlavně proto, abychom mohli posoudit, zda po dokončení vodohospodářských úprav až v důsledku ohrázování odpadnou záplavy, bude vztlínající podzemní voda dostačovat k zásobování porostů lužních lesů vodou.

Z hodnot potenciálu vody (resp. sacího tlaku) měřeného tenziometry je možno přímo odvozovat ekologické závěry. Pro zjištění rychlosti pohybu vody v půdě a směru pohybu však musíme z potenciálu (měřen je matriční potenciál, resp. kapilární potenciál) odvodit hydraulickou výšku (s ohledem na geodetickou výšku), z ní vztažením ke vzdálenosti odměrných míst hydraulický gradient i (záporný ve směru vzhůru, kladný směrem dolů).

Protože rychlost pohybu vody v nenasycené půdě je podle rovnice Darcyho-Buckinghamova v diferenciální formě

$$v = -k_s \frac{d\Phi}{dx},$$

musíme znát též koeficient hydraulické vodivosti k_s pro nenasycenou půdu. Vzhledem k tomu, že v roce 1972 byla vlhkost půdy mimořádně vysoká, je pro nás zajímavý průběh rychlosti pohybu vody v roce 1971, který byl vlhkostně vcelku „normální“ (tabulka III).

Tabulka ukazuje, že dodávka vody ze spodiny vzhůru vztlínáním (rychlost v hloubce 100–150 cm; výše už je rychlost ovlivněna kořenovou desukcí) má význam pro porosty jen těsně po poklesu hladiny podzemní vody z těchto vrstev. V Lanžhotě 10. 7. podzemní voda klesala

III. Rychlost vertikálního pohybu vody v půdě (cm/den). — Rate of vertical water movement in the soil (cm/day)

Hloubka cm	Směr	12. 6.	10. 7.	1. 8.	22. 8.	13. 9.	5. 10.	
Lanžhot 1971								
20 — 50	vzhůru		0,05	0,05	0,002			
	dolů	0,2				0,003	0,008	
50 — 100	vzhůru	0,03	0,08	0,05	0,006	0,003	0,001	
100 — 140	vzhůru			0,26	0,07	0,007	0,004	
	dolů	0,9	0,8					
Moravská Nová Ves — Anglická 1971								
				1. 8.	21. 8.	6. 9.	26. 9.	30. 10.
10 — 50	vzhůru			0,016				
	dolů				0,003	0,006	0,013	0,007
50 — 100	vzhůru			0,03	0,01	0,008	0,004	0,0001
100 — 150	vzhůru			0,04	0,03	0,02	0,02	0,002

z vrstev v hloubce 100—140 cm rychlostí 8 mm za den; pak se gradient obrátil nahoru a 1. srpna se zde pohybovala voda rychlostí 2,6 mm za den nahoru. Proti vysoké spotřebě porostů v tomto období, která se pohybuje okolo 6 mm za den, je to málo, ale množství se blíží střední hodnotě evapotranspirace a je tedy pro porosty významné. Ale již 22. srpna je množství vody protékající touto vrstvou půdy nahoru prakticky bezvýznamné, a to jen 0,7 mm, a 13. 9. už jen 0,07 mm za den.

Je vidět, že v době nízkých stavů hladiny podzemní vody (v létě, kdy je spotřeba vody porosty největší) nelze spoléhat na dodávku vody z hladiny podzemní vody. Krátkodobé vzestupy hladiny po deštích v souvislosti se stoupnutím hladiny v řece se v tomto období v prokořeněných vrstvách půdy vůbec nebo téměř vůbec neprojeví. Podstatný význam má vysoký stav hladiny podzemní vody, pokud trvá tak dlouho, že provlhlčí i svrchní, prokořeněné vrstvy půdy; to bývá zpravidla v zimě a na jaře, kdy porosty transpirují velmi slabě. V poměrně krátké době po poklesu hladiny pod vrstvu 1—1,5 m hloubky (asi za 2 až 4 týdny podle počasí) ztrácí dodávka vody z podzemní vody do prokořeněných vrstev půdy význam.

TLOUŠŤKOVÝ PŘÍRŮST DUBU VE VZTAHU K PŮDNÍ VLHKOSTI BĚHEM VEGETAČNÍHO OBDOBÍ

V diagramech průběhu sacího tlaku na jednotlivých plochách jsou znázorněny i hodnoty tloušťkového přírůstu (přírůst poloměrů tří nejprůrůstavějších a všech měřených stromů na ploše, kterých bylo 9 až 12), a to v setinách mm za den, dále průběh průměrných denních teplot a srážky v mm, takže jsou zachyceny hlavní vnější faktory, které ovlivňují tloušťkový přírůst.

Souvislost tloušťkového přírůstu s průběhem půdní vlhkosti, resp. potenciálu vody, je zřejmá. Nelze pochopitelně očekávat naprostý souhlas obou hodnot, protože přírůst je kromě vlhkosti ovlivněn řadou dalších faktorů vnějších i vnitřních. Tak např. nízký přírůst začátkem vegetačního období, kdy je vody dostatek, je často důsledkem nízkých teplot. Vysoký přírůst nebo alespoň jeho zvýšení v období vysokého sacího tlaku (tedy nedostatku lehce přístupné vody) se někdy vyskytne v důsledku dešťových srážek, které se neprojeví zvlhčením půdy, ale ovlhčením listů a zvýšením vzdušné vlhkosti umožní stromům fotosyntézu, a tím tloušťkový přírůst (Lanžhot, konec srpna 1971). Někdy se projeví zvýšením půdní vlhkosti a výrazným zvýšením přírůstu (Lanžhot konec července 1971).

I když nelze stanovit hodnotu sacího tlaku, od níž začíná přírůst klesat, jednoznačně pro všechny případy (záleží též na počasí, druhu rostlin atd.), můžeme přibližně považovat sací tlak nad 50 kPa (asi 500 mm vodního sloupce) za faktor omezující přírůst. Při vysokých teplotách se někdy tato mez začíná projevovat už při sacím tlaku nad 30 kPa (Lanžhot, červenec 1972). Důležité jsou přitom zejména hodnoty v hloubce 50 cm, protože tyto povrchové vrstvy jsou dřevinami značně prokořeněny.

Maximálních hodnot tloušťkového přírůstu (okolo 5–7 setin mm za den) bylo dosaženo v obdobích, kdy byl sací tlak vody v půdě okolo 10 až 20 (někdy až 30) kPa, tedy okolo polní kapacity za předpokladu, že i ostatní faktory byly příznivé, a to jak faktory vnější, tak i vnitřní předpoklady stromů. Krátkodobé kolísání přírůstu může mít příčiny vnitřního rázu (Kramer – Kozłowski 1960). Nástup trvalého klidu na Břeclavsku není dán nedostatkem vody ani nízkými teplotami, ale jde zřejmě o normální ukončení růstu dané vnitřními příčinami.

Z diagramů je vidět nejen negativní vliv nedostatku vody, ale i negativní vliv opačného extrému, přílišného dlouhotrvajícího zamokření, k němuž došlo v roce 1972 v důsledku četných a silných záplav v Lanžhotě a ještě výrazněji na ploše Moravská Nová Ves – Anglická.

VÝSLEDKY RHIZOLOGICKÉHO VÝZKUMU

Výzkum, který konal A. Šika (1972), ukázal, že na těžkých jílovitých půdách v zaplavovaném i nezaplavovaném luhu většina kořenů dubu tenčích než 1 mm je soustředěna v povrchových půdních horizontech; v zaplavovaném luhu je tato jejich koncentrace při povrchu výraznější. Z toho lze usuzovat, že i v zaplavovaném luhu s vysokou hladinou podzemní vody na těžkých půdách čerpá dub většinu potřebné vody z povrchových vrstev půd, které mají příznivější strukturu a jsou lépe provzdušeny i lépe zásobeny přístupnými živinami.

VÝSLEDKY PŘÍRŮSTOVÉ ANALÝZY

Přírůstová analýza konaná B. Vinšem (1972) nepřinesla jednoznačné závěry o vlivu záplav v průběhu delší řady let. Důvodů je několik, hlavní však záleží ve výše zjištěném poznatku, že nelze hodnotit každou záplavu stejně; důležité je, v jakém období a za jakého stavu vlhkosti půdy a aktivy porostů přichází. To ovšem nelze retrospektivně

zjistit, protože z celé řady let, kterou letokruhov^á analýza zachytila, tyto údaje nejsou. Zhodnocení vztahů mezi přírůstem zjištěným zpětně letokruhov^{ou} analýzou a vodním režimem jihomoravských lužních lesů vyjádřeným režimem záplav a srážkami zpracovali K. Mráz a B. Vinš (1973).

DISKUSE A ZÁVĚRY

1. Existuje zřetelná závislost mezi tloušťkovým přírůstem a obsahem a vazbou vody v půdě, jež se projevují v sacím tlaku, resp. potenciálu vody. To platí, pokud nepřevládá vliv jiného omezujícího faktoru, např. teploty.

2. Rozhodující pro přírůst stromů na zkoumaných plochách je množství vody v hloubce asi do 50–70 cm. Vrstvy mezi 30–60 cm hloubky nejvíce vysychají, což je vidět i z diagramů chronoizoplet vlhkosti, které jsme získali jinými metodami a tedy nezávisle na měření potenciálu vody.

3. Pro přírůst není rozhodující voda v hlubších vrstvách půdy, i když může mít kladný vliv na přežití porostů v obdobích sucha. Jak je známo z fyziologie, kořeny silně snižují aktivitu v půdní atmosféře, chudé kyslíkem a bohaté CO₂, popř. dalšími škodlivými plyny; takové poměry jsou ve špatně provzdušených spodinách půd, chudých hrubými póry.

4. Hrubých pórů, které odvádějí gravitační vodu a umožňují provzdušení půdy, je v jílovitých půdách jihomoravských lužních lesů málo (1 až 2 %). Je zde i velmi málo (většinou 2–6 %) středních pórů I. skupiny, které představují zásobárnu lehce přístupné vody. Jemné póry s vodou rostlinám nepřístupnou zaujímají 27 až 36 % objemu půdy při celkové pórovitosti 42 až 54 % objemu.

5. Chceme-li posoudit, jak dlouho vystačí porostům zásoba vody po nasycení půdy vodou, potřebujeme znát veličinu evapotranspirace; v literatuře se uvádějí jako vysoké hodnoty v létě a na vlhké půdě čísla okolo 5 až 6 mm za den (P. S. Pogrebnjak 1968, A. Brühlhart 1969, P. Beněcke 1972 aj.).

Evapotranspiraci můžeme vypočítat z našich údajů na základě rovnice

$$ET = N - dZ + V,$$

kde ET — je evapotranspirace,

N — srážky za období,

dZ — rozdíl zásoby (obsahu vody v půdě za období,

V — vztlínání z vlhčí spodiny do kořenového prostoru (všechny údaje v mm).

Pro plochu Lanžhot v roce 1971 v období maximálního přírůstu (26. července až 8. srpna) byla evapotranspirace:

období	N mm	dZ mm	V mm	počet dní	ET mm za den
26. 7.—1. 8.	22	+4,0	15	6	5,5
1. 8.—8. 8.	0	–6,5	15,4	7	3,1

a v období minimálního přírůstu:

16.—22. 8.	0	–2,5	5,7	6	1,4
------------	---	------	-----	---	-----

Z toho je dobře vidět, jak v tomto horkém letním období porosty musejí omezovat transpiraci, a tím i tloušťkový přírůst pro nedostatek vody v půdě.

6. Výpočet z výše uvedených hodnot zásoby vody při nasycení a evapotranspirace ukazují, jak dlouho vydrží zásoba přístupné vody po nasycení půdy zásobovat porosty.

Při spotřebě vody evapotranspirací

vystačí voda	vysoké (5 mm za den)	střední (3 mm za den)	nízké (1,5 mm za den)
lehce přístupná	16 dní	27 dní	54 dní
těžce přístupná	18 dní	30 dní	60 dní
celkem přístupná	34 dní	57 dní	114 dní

Tato čísla platí pro případ, že by nedošlo k dalšímu doplnění zásob vody srážkami ani jinak. Ve skutečnosti vystačí tato zásoba obvykle o něco déle, jak je vidět z diagramů chronoizopleť sacího tlaku, a to to pro udržení silného přírůstu asi 5 až 7 týdnů; je to jednak vzhledem k doplňování vody srážkami, jednak proto, že obvykle podmínky pro maximální transpiraci netrvají nepřetržitě po dlouhou dobu. Za příznivého počasí bez srážek by se však situace přiblížila poměrům vyjádřeným výše uvedenou tabulkou.

7. Rychlost pohybu vody v půdě, zejména v půdě nenasyčené vodou, je tak malá, že vztlínání z podzemní vody za nižších letních stavů nepřichází jako zdroj zásobování porostů vodou prakticky v úvahu, protože naprosto nestačí doplňovat vodu spotřebovanou na evapotranspiraci. Přísun vody, který má význam pro porosty, trvá jen krátkou dobu po nasycení.

V případě klesnutí hladiny podzemní vody hlouběji do štěrkopískového podloží by byla kapilární souvislost přerušena a dodávka vody zcela zastavena.

Význam hladiny podzemní vody je v tom, že za dlouhotrvajících vysokých stavů, jaké bývají v zimě a počátkem jara, nasycuje půdní profil vodou a tak vytváří zásobu vody pro porosty.

8. Průběh hodnot potenciálu vody (resp. sacího tlaku) v období po nasycení půdy vodou je na Břeclavsku podobný jako na Uherskohradištsku, kde byla úprava Moravy realizována už roku 1936, takže odpadly záplavy. Liší se jen určitou dobu po nasycení, kdy je na Břeclavsku v hloubce okolo 100–150 cm půda vlhčí vlivem pomalu klesající hladiny podzemní vody. Velký rozdíl je ovšem v tom, že záplavy na Břeclavsku způsobují častější nasycení profilu vodou. Po odstranění záplav po vodohospodářských úpravách na Břeclavsku je možno očekávat, že se zdejší poměry přiblíží poměrům na Uherskohradištsku; podzemní voda nebude stačit nahradit vodu z dosavadních záplav v letní době. Dojde k určitému vysušení, které se patrně nejvýrazněji projeví v plošně převládajících typech dubových jaseňin a habrovo-jilmových jaseňin na jílovitých půdách.

Vzhledem k tomu, že vysoké stavy hladin podzemní vody v zimním a jarním období mohou nasytit celý půdní profil vodou, není nutno

počítat s velmi výrazným snížením přírůstu, pokud se režim podzemní vody nezmění, a v letech s normálním rozložením srážek. Poměry se zhorší více pro jasan než pro dub. Na druhé straně se však odstraní omezující vliv nadměrných záplav.

SOUHRN

Předmětem výzkumu byl vodní režim jílovitých glejů lužních lesů při dolní Moravě. Uskutečnil se pomocí měření sacího tlaku tenzimetrem. Cílem bylo poskytnout lesnímu provozu vědecky podloženou prognózu pro období po dokončení úprav řeky a současně zachytit co nepřesněji současné poměry, abychom získali podklady pro srovnání se stavem po úpravách řek, které povedou především k odstranění dnešních živelních záplav.

Kromě výzkumu půdy se měřil rovněž tloušťkový přírůst dubu, a to pomocí dotykového mikrometrického zařízení během vegetačního období. Výpočet pohybu vody jsme konali podle Brülharta (1969). Výzkum ukázal zřetelnou souvislost mezi obsahem a vazbou vody v půdě a tloušťkovým přírůstem. Sací tlaky nad 50 kPa (= 0,5 bar) lze považovat za omezující přírůst. Ve zkoumaných půdách jsou rozhodující podmínky asi do 50–70 cm hloubky. Půdy, zejména spodiny, jsou velmi chudé hrubými póry (1–2 %), i středními póry s napětím do 100 kPa (= 1 bar). Výpočty evapotranspirace daly hodnoty 3,1–5,5 mm za den pro období nejvyššího přírůstu a 1,4 mm pro období nejnižšího tloušťkového přírůstu. Z toho vyplývá, že zásoba lehce přístupné vody stačí po nasycení půdy vodou zásobovat porosty asi 1 měsíc, těžce přístupná další měsíc. Rychlost vztlínání vody z hladiny podzemní vody je už při nízkých sacích tlacích tak malá, že je pro zásobování porostů v létě bezvýznamná.

Po úpravě řek je třeba počítat s určitým vysušením oblasti, které povede především ke zhoršení podmínek pro jasan *Fraxinus oxycarpa*. Na druhé straně odpadnou nepříznivé účinky nadměrného zamokření po příliš silných záplavách.

Došlo dne 29. 1. 1976

Literatura

1. BENECKE, P.: Der Wasserhaushalt von Buchenbeständen des Sollings. Forst-u. Holzwirt, 27, 1972, s. 48–52
2. BRÜLHART, A.: Jahreszeitliche Veränderungen der Wasserbindung und der Wasserbewegung in Waldböden des schweizerischen Mittellandes. Mitt. schweiz. Anst. forstl. Vers-wes. 45, 1969, s. 125–232.
3. Geotest Brno (kolektiv), Studie Tvrdonice-Lanžhot. Brno 1969
4. HORÁK, J.: Lužní lesy a vodohospodářské úpravy jihomoravské krajiny. Ochrana přírody 1963, s. 63–64
5. JAKUBEC, B.: Meliorace lesů v oblasti jižní Moravy. Studie. Vývojové pracoviště SLH-MLVH, Praha 1963
6. KRAMER, P. J. — KOZLOWSKI, T. T.: Physiology of trees. New York-Toronto-London 1960
7. KUTÍLEK, M.: Vodohospodářská pedologie. SNTL, Praha 1966
8. MEZERA, A.: Středoevropské nížinné luhy. SZN Praha, I. 1956, II. 1958.
9. MRÁZ, K.: Očekávané změny stanovištních poměrů jihomoravských lužních lesů vlivem budovaných vodohospodářských úprav. Zprávy les. výzk. 1973, 3, 2–9

10. MRÁZ, K. — VINŠ, B.: Vliv zásobení vodou na tloušťkový přírůst dubu a jasanu v jihomoravských lužních lesích. Zprávy les. výzk. 1973, 9-13
11. MÜLLER, W. — RENGGER, M. — BENECKE, P.: Bodenphysikalische Kennwerte wichtiger Böden... Beih. geol. Jb., Beitr. 99/2, Hannover 1970, s. 13-70
12. PELÍŠEK, J.: Hlavní typy půdní vlhkosti v lužních oblastech ČSSR. Sb. ČSAV Vegetační problémy při budování vod. děl, 1964, s. 113-134
13. POGREBNJAK, P. S.: Общете лесоводство. 2. Kolos, Moskva 1968
14. RICHARDS, L. A.: Methods of measuring soil moisture tension. Soil Sci. 68, 1949, s. 95-112
15. SEMOTÁN, J.: Výpočet hydraulické vodivosti neporušených půdních vzorků. Vodní hospodářství, A, 5., 1973, 107-110
16. SLATYER, R. O.: Plant-water relationships. Academic Press, London and New York, 1967, 366 s.
17. ŠIKA, A.: Kořenové systémy lesních dřevin jihomoravských lužních lesů. Závěrečná zpráva VÚLHM, Strnady 1972
18. ŠIKA, A. — MRÁZ, K.: Význam prokořenění půd lužních lesů se zvláštním zřetelem k pěstování rychle rostoucích dřevin. Práce VÚLHM 38, 1964, s. 81-157
19. VETTERLEIN, E.: Über einige Ergebnisse von Saugspannungsmessungen in Böden mittels Vakuumkapilarimeters und Druckmembranapparatur. Zt. f. landw. Vers. u. Unters. wes., 5, 1959, s. 339-354
20. VINŠ, B.: Přírůstová analýza jihomoravských lužních lesů. Závěrečná zpráva VÚLHM, Strnady 1972
21. ZLATNÍK, A.: Vegetační poměry moravských lužních lesů. Čs. les., XXVIII, 1948, s. 15-16

MPA3, K. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): Бодный режим южноморавских пойменных лесов до завершения водохозяйственной регулировки реки Моравии. Lesnictví, 23, 1977 (1) : 1-22.

Предмет исследований — водный режим илистых глеев под пойменными лесами вдоль нижнего течения Моравы, который определяли с помощью измерений давления всасывания тензометрами. Цель работ состояла в предоставлении лесному хозяйству научно обоснованного прогноза на период после завершения регулировочных работ и в то же время в точном описании существующих условий, которые послужат для сравнения с положением после регулировки рек, направленной на устранение стихийных наводнений.

Кроме обследований почвы измеряли и прирост дуба в толщину с помощью касательного микрометрического устройства в течение вегетационного периода. Движение воды измеряли по методу Брюльгарта (1969 г.). Исследования показали явную связь между содержанием и связью воды в почве и приростом в толщину. Давления всасывания свыше 0,5 бара можно считать факторами, ограничивающими прирост. В изучаемых почвах решающими представляются условия на глубине до 50—70 см. Эти почвы, особенно подпочва, бедны крупными порами (1—2 %) и средними порами напряжением до 1 бара (2—6 %). Вычисления эвапотранспирации показали величины 3,1—5,5 мм в день в период максимального прироста и 1,4 мм в период минимального прироста в толщину. Следовательно, запас легкодоступной воды достаточен для насыщения почвы к снабжению насаждений водой примерно на 1 месяц, а труднодоступной — еще на 1 месяц. Скорость поднимания воды из грунтовой воды при низких давлениях всасывания уже так мала, что летом становится совершенно незначительной для снабжения насаждений влагой.

После регулировки рек следует ожидать некоторого иссушения областей, что поведет к ухудшению условий для ясеня (Фраксинус охусгра). С другой стороны, отпадет неблагоприятное влияние чрезмерного увлажнения, которое до сих пор иногда имело место (напр. в 1972 г. — см. диаграмму) после сильных наводнений.

MRÁZ, K. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): Water Regime of South-Moravian Lowland Forests Before the End of the Morava River Water — Management Adjustments. Lesnictví, 23, 1977 (1) : 1-22.

Water regime of clay gleys of lowland forests near the low run of the Morava river has been a subject of an investigation. It has been carried out with help of measuring the suction pressure by tensiometres. We intended to furnish our forestry with scientifically — founded prognosis for a period after the adjustments and simultaneously to put down the present situation most exactly, in order to get the basis for a comparison with the after-adjustment situation, which should lead

to removal of uncontrolled floods of today. Besides the soil investigation, there has been measured the diameter increment of oak during the vegetation period — by means of contiguous micrometric equipment. The water movement has been computed after Brühlhart (1969). The research showed the distinct relation between the content and bond of water in the soil and the diameter increment. Suction pressures above 50 kPa = 0.5 bar cut down the increment. What is most important in the soils under investigation are the conditions up to 50–70 cm of deepness. The soils, especially the subsoils, are very poor in coarse pores (1–2 %) and middle pores with tension to 100 kPa = 1 bar (2–6 %). Evapotranspiration computations showed the values 3.1–5.5 mm per day for the period of the highest increment and 1.4 mm for the period of the lowest diameter increment. Hence it follows that the reserves of easy available water (after saturation of the soil with water) are able to supply the stands approximately for 1 month, hard available ones for one more month. Rate of water capillarity from the ground-water table is already at low suction pressures so slow that it is quite unimportant for the stand supply in summer.

After the end of the river adjustment, it is necessary to take into account a certain dryness of the area which will lead to deterioration of European ash (*Fraxinus oxycarpa*) conditions above all. On the other hand there will no longer appear the unfavourable effects of the excessive wet, which comes after too strong floods (e. g. in 1972 — see the diagram).

MRÁZ, K. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): Der Wasserhaushalt südmährischer Auenwälder vor der Beendigung der Flußregulation der Morava. Lesnictví, 23, 1977, (1): 1–22.

Der Gegenstand der Untersuchungen war der Wasserhaushalt der tonigen Gleyböden in Auenwäldern an der unteren Morava, der mit Hilfe von Tensiometermessungen der Saugspannung des Bodenwassers ermittelt wurde. Das Ziel der Untersuchungen war es, eine wissenschaftlich begründete Prognose der forstlichen Planung für die Zeit nach der Beendigung der Regulationsarbeiten zu geben, und zweitens die jetzigen Verhältnisse möglichst genau zu erfassen, um entsprechende Unterlagen für den Vergleich mit den Verhältnissen zu haben, die sich nach der Eindämmung und Regelung des Flußlaufes einstellen werden, was vor allem zur Beseitigung der jetzt häufigen Überschwemmungen führen wird.

Außer den Bodenuntersuchungen wurde auch der Durchmesserzuwachs der Eiche mit Hilfe einer mikrometrischen Einrichtung während der Vegetationszeit ermittelt. Die Berechnung der Wasserbewegung wurde auf dieselbe Weise vorgenommen, die Brühlhart (1969) angewandt hat. Die Untersuchungen ergaben einen deutlichen Zusammenhang zwischen dem Wassergehalt und der Wasserbindung im Boden und dem Zuwachs. Die Saugspannungswerte über 50 kPa (= 0.5 bar) können als wachstumshemmend angesehen werden. (Vgl. Diagramme der Chrono-isoplethen der Saugspannung und des Zuwachses.) Entscheidend sind in den untersuchten Böden die Verhältnisse des Oberbodens bis etwa 50–70 cm Tiefe. Die Böden insbesondere ihre Unterböden, sind sehr arm an Grobporen (1–2 Vol.-%), und an Mittelporen mit Spannung bis 100 kPa (= 1 bar), (2–6 %). Die Berechnungen ergaben Evapotranspirationswerte von 3.1–5.5 mm pro Tag in der Zeit des höchsten und 1.4 mm in derjenigen des niedrigen Zuwachses. Daraus ergibt sich daß der Vorrat an leicht verwertbarem Wasser nach Wassersättigung durchschnittlich etwa 1 Monat zur Versorgung der Bestände ausreicht. Die Geschwindigkeit des vom Grundwasserspiegel aufsteigenden Wassers ist schon bei kleinen Saugspannungen so gering, daß es für die Versorgung der Bestände im Sommer bedeutungslos ist.

Nach der Eindämmung der Flüsse ist mit gewisser Austrocknung zu rechnen, die vor allem zur Verschlechterung der Wuchsverhältnisse für die Esche (*Fraxinus oxycarpa*) führen wird; andererseits wird die ungünstige Wirkung übermäßiger Vernässung entfallen, die sich nach zu starken Überschwemmungen (z. B. 1927–vgl. Diagr.) einstellte.

MRÁZ, K. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): Régime hydrique des forêts fluviales de Moravie méridionale avant l'achèvement des aménagements hydrauliques de la rivière Morava. Lesnictví, 23, 1977 (1): 1–22.

C'est le régime hydrique des gley argileux des forêts fluviales dans le cours inférieur de la rivière Morava qui fut l'objet de la recherche. Celle-ci a été réalisée

à l'aide de la mesure de la pression d'aspiration en utilisant les tensomètres. L'objectif consistait à procurer à l'exploitation forestière un pronostic scientifiquement justifié pour la période où sera achevé l'aménagement de la rivière et à saisir simultanément le plus précisément que possible l'état de choses actuel, en vue d'obtenir la documentation qui permette la comparaison avec l'état consécutif aux aménagements des rivières qui auront notamment pour conséquence l'élimination des inondations spontanées actuelles.

Outre à la recherche du sol on procédait aussi à la mesure de l'accroissement en diamètre du chêne, en appliquant, au cours du cycle végétatif, un dispositif micrométrique de contact. Le calcul du mouvement de l'eau était effectué en appliquant la méthode de Brühlhart (1969). La recherche a montré un rapport évident entre la teneur en eau et sa liaison dans le sol et l'accroissement en diamètre. Les pressions d'aspiration qui dépassent $50 \text{ kPa} = 0,5 \text{ bar}$ peuvent être considérées comme celles qui limitent l'accroissement. Les conditions décisives dans les sols examinés se trouvent à une profondeur d'environ 50–70 cm. Les sols, notamment les sous-sols, sont très pauvres en vides gros (1–2 p. 100) et même en vides moyens dont la tension ne dépasse pas $100 \text{ kPa} = 1 \text{ bar}$ (2–6 j. 100). Les calculs de l'évapotranspiration ont donné, dans la période d'accroissement maximum, des valeurs de 3,1–5,5 mm par jour, et dans la période d'accroissement en diamètre minimum, des valeurs de 1,4 mm. Il en découle que la réserve d'eau facilement accessible suffit d'approvisionner, à la suite de la saturation du sol d'eau, les peuplements pendant environ 1 mois, celle de l'eau difficilement accessible encore un mois ultérieur. La vitesse de l'action capillaire de l'eau venant du niveau d'eau souterraine est à des pressions d'aspiration faibles déjà tellement petite qu'elle devient sans importance pour l'approvisionnement des peuplements en été.

Après l'aménagement des rivières il est nécessaire de compter avec une certaine dessiccation de la région qui aura pour conséquence notamment la détérioration des conditions pour le frêne (*Fraxinus oxycarpa*). D'autre part cependant les effets défavorables, dus à la saturation d'eau excessive qui avait jusqu'ici quelquefois lieu (par exemple en 1972 – voir le diagramme) après les inondations très fortes, ne se produiront plus.

Adresa autora:

Ing. Karel Mráz, CSc., Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady

B. Urošević

UROŠEVIĆ, B. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): Nádorová rakovina kořenů lesních dřevin. Lesnictví, 23, 1977 (1): 23-32.

Z kořenové rakoviny dubu, vrby, třešní a divoce rostoucích oliv jsme izolovali celkem 5 kmenů bakterií, které jevíly shodné morfologické i biochemicko-fyziologické vlastnosti. Svými morfologickými a biochemicko-fyziologickými vlastnostmi izolované kmeny odpovídají bakterii *Agrobacterium tumefaciens* (Smith et Town.) Conn., původci nádorové rakoviny kořenů. Podle našich šetření (Urošević 1973) virulence jednotlivých kmenů bakterie *Agrobacterium tumefaciens* je závislá na přítomnosti speciálního bakteriálního virusu, bez bičíků, velikosti 24 nm. Vlivem virusu dochází nejdříve k rozpadu bičíků a později i buněčných stěn a k tvorbě pravidelných kulovitých filtrabilních částic, velikosti 50–500 nm. Filtrabilní částice, které na svém povrchu mají ve velkém množství adsorbovaný bakteriální virus, jsou schopny pronikat buněčnou blánou. Jádra napadených buněk se obvykle zvětšují a pod vlivem patogena se dělí na větší počet jader, která tvoří základ nádorových buněk.

Agrobacterium tumefaciens; nádorová rakovina; bakteriální virus; filtrabilní částice

Původce této obávané choroby, zejména ovocných stromů, poprvé izolovali a popsali již v roce 1907 Smith a Townsend pod názvem *Bacterium tumefaciens* Smith et Townsend. Od té doby byla bakterie zjištěna mnohokrát v četných zemích světa. U nás byla nacházena především na kořenech ovocných stromů, vinné révy aj. kulturních rostlin, ojediněle též na vrbách a jiných dřevinách (Baudyš 1923, Smolák 1929, Němec 1928 aj.).

S kořenovou rakovinou jsem se poprvé setkal již roku 1962 na vrbových prutech v okolí Břeclavi a v roce 1966 v okolí Jevíčka. Později jsme chorobu nacházeli zejména na sazenicích dubu letního (ze školky Vrchotovy Janovice v roce 1966), v okolí Zbraslavi (1973) a v okolí Lovosic (1973, 1974). Ojediněle jsme kořenovou rakovinu nacházeli i na sazenicích buku (v okolí Janova v roce 1973). Původce choroby jsem izoloval též z kořenů divoce rostoucích oliv z materiálu, který jsme obdrželi z Tunisu (Laboratoire de Phytopathologie d'Inrat).

Naposled jsem původce choroby izoloval koncem roku 1975 z nádorů na kořenech sazenic třešní, které jsme obdrželi z VŠZ v Č. Budějovicích. Šlo o větší množství šlechtitelského materiálu značné hodnoty dovezeného z Holandska.

S ohledem na hospodářský význam kořenové rakoviny považovali jsme za účelné se chorobou podrobněji zabývat.

MATERIÁL A METODIKA

Z tumoru na kořenech a kořenovém krčku dubových sazenic se podařilo izolovat tři kmeny bakterií. Jeden kmen byl izolován z tumoru na kořenech divoce rostoucích oliv a jeden kmen z nádoru na kořenech sazenic třešní.

Ve všech případech byla izolace bakterií uskutečněna z čerstvých nádorů (tumorů). Po povrchové dezinfekci byla odstraněna vrchní vrstva pletiv a sterilní pinzetou vyškrábány částčky nádorových pletiv a dány na připravené živné půdy v Petriho miskách. Izoláty bakterií byly přeočkovány proztíráním na plotny kvasnicového agaru za účelem získání jednosporových kolonií, které jsme přenášeli na šikmý kvasnicový agar do zkumavek.

K určování morfologických znaků jsme použili jak klasickou mikroskopickou metodu, tak i elektronovou mikroskopii. K diagnostice izolovaných bakterií jsme použili běžné metody pro určování fytopatogenních bakterií.

ETIOLOGIE CHOROBY

Z kořenové rakoviny dubu, vrby, třešní a divoce rostoucích oliv jsme izolovali celkem pět kmenů bakterií, které jevíly shodné morfologické a biochemicko-fyziologické vlastnosti.

Podle zjištěných morfologických znaků jde o gram negativní, nesporulující tyčinky uspořádané jednotlivě anebo ve dvojicích. U většiny kmenů jsou bičíky nejasné, rozpadají se. Pomocí elektronové mikroskopie je však možno pozorovat též jeden až čtyři polární bičíky.

Na MPA bakterie roste pomalu, na povrchu tvoří blanku s malým, slizovitým kruhem. Na kvasnicovém agaru bakterie tvoří drobné kulaté, vlhce lesklé, bílé, prosvítající, poněkud vypouklé kolonie máslovité konzistence.

V bujónu nastává slabý zákal a postupně se tvoří slabá blanka. Starší bujónové kultury mají velmi slabý zákal a střední sediment.

Na želatině rostou drobné, kulaté, bílé kolonie. Většina kmenů želatinu neztekucuje ani po dobu 30 dnů. U dvou kmenů však po měsíci došlo k pomalému, válcovitému ztekucení želatiny.

Odstředěné mléko se sráží v drobných vločkách a usazuje se na dně zkumavky a na povrchu zůstává průsvitný kruh mléčné syrovátky. Bromkrezolové mléko zůstává asi 15 dnů beze změny, potom dochází k slabému srážení a k nejasné změně barvy indikátoru. U některých kmenů indikátor ukazuje i na kyselou reakci.

V roztoku Fermise a Cohna bakterie neroste. V roztoku Uschinského bakterie roste velmi pomalu a po 15 dnech tvoří slabý zákal.

Redukci nitrátů jsem zjistil u většiny kmenů. U dvou zkoumaných kmenů však jen slabé stopy. Tvorbu indolu jsme nezjistili u žádného ze zkoumaných kmenů. Tvorba čpavku a sirovodíku byla zjištěna u všech kmenů, i když u některých teprve po dvou týdnech a v menší míře Škrob není hydrolyzován.

Bakterie tvoří kyseliny bez plynu na glukóze, manitu, galaktóze, maltóze, dulcitu, fruktóze a rhamnóze. Pomaleji jsou zkvašovány sa-

charóza, arabinóza, xylóza, glycerín, sorbóza, raffinóza a zejména laktóza. U žádného zkoumaného kmenu jsme nezjistili zkvašování amygdalinu a dextrinu.

Svémi morfologickými a biochemicko-fyziologickými vlastnostmi izolované kmeny odpovídají baktérii, kterou v roce 1907 Smith a Townsend popsali pod názvem *Bacterium tumefaciens*. Baktérie byla později přejmenována na *Pseudomonas tumefaciens* (Smith et Town.) Stevens (1943); *Polymonas tumefaciens* (Smith et Town.) Lieske (1928) a konečně *Agrobacterium tumefaciens* (Smith et Town.) Conn. (1942).

PŘÍZNAKY CHOROBY

Při onemocnění se na postranních kořenech, kořenovém krčku nebo i na stonku mladých sazenic tvoří nejdříve malé novotvary, jejichž velikost a počet se postupně zvyšuje. Nádory jsou nejdříve měkké, skládají se z bělavého nebo nazelenalého parenchymatického pletiva. Nejčastěji jsou kulovitého tvaru, později se poněkud zplošťují a postupně se v nich tvoří trhliny, takže vzniká zvrásněný, důlkovitý povrch. Jsou však známy nádory zcela hladké.

Nádor v podstatě roste stejně jako při bakteriální rakovině, tj. buňky se pod vlivem patogena urychleně nenormálně dělí a dochází ke zřetelné proliferaci pletiv. Později se pletiva uvnitř nádoru začínají rozpadávat, zejména vlivem poloparazitické a později i saprofytické mikroflóry.

Průběh infekce a růst nádorů rozdělují Klein a Link (1955) na čtyři stadia:

- a) stadium přeměny normální buňky v buňku nádorovou;
- b) stadium dělení, při kterém se nádorové buňky nesystematicky množí (v tomto období se tvoří druhotné nádory označované podle lékařského názvosloví též metastázy);
- c) stadium organizace buněčných elementů a jistá diferenciace buněk a vytváření cévních svazků;
- d) stadium stárnutí a nekróza nádorů.

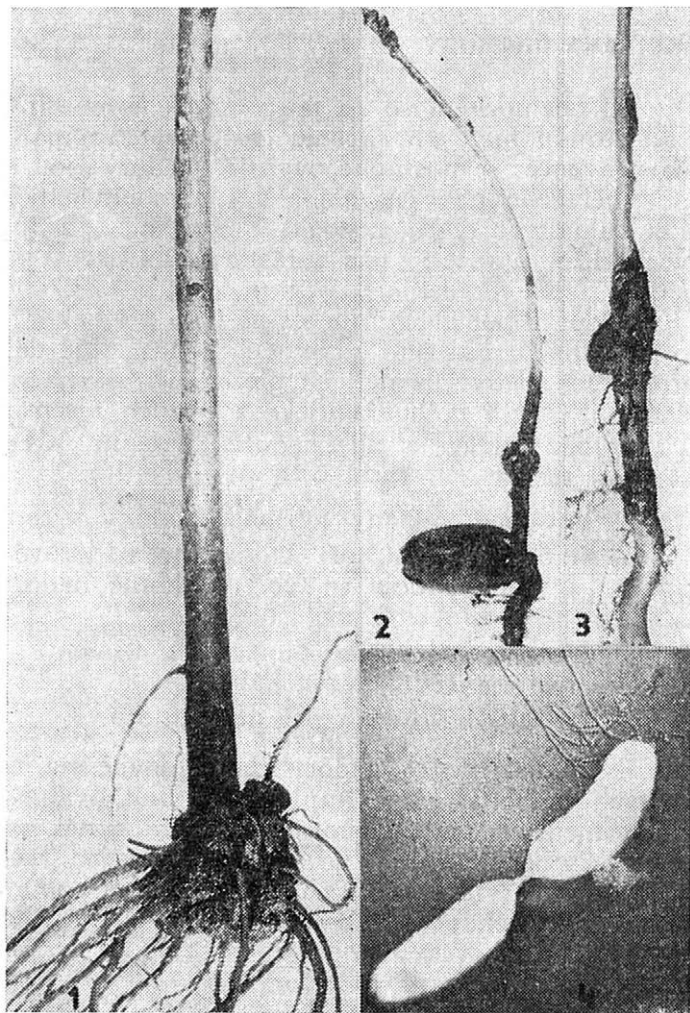
Je známo, že se nádory tvoří hlavně na úkor parenchymatického pletiva, druhotné kůry. Buňky mají buď oválný, nebo vřetenovitý tvar a jsou menší než buňky normální. Jádra buněk se obvykle zvětšují a pod vlivem patogena se dělí na větší počet jader, která tvoří základ nádorových buněk. Tyto rychle se dělící buňky připomínají buňky embryonální, nejsou však schopny se dále diferencovat. V nádorech buď cévní svazky chybí, nebo se vyskytují jen jejich určité prvky. Tyto vlastnosti jsou charakteristické pro prvotní nádory.

Vedle prvotních nádorů, jak již bylo řečeno, se vyskytují i nádory druhotné. V současné době je známa teorie tzv. druhotných provazců. Tvrdí se, že během času pletiva nádorů získávají jakoby samostatné postavení v rostlinném organismu a mohou se rozrůstat na různé strany podle přítoku živných látek nebo podle nejmenšího odporu okolních pletiv. Nádorové pletivo vytváří v rostlině provazce, které se rozrůstají, obdobně jako houbové mycelium, a v určitých vzdálenostech tvoří nové, tzv. druhotné nádory.

Zatím zdaleka není jednotný názor na vznik jak prvotních, tak zejména druhotných nádorů. Stapp (1938) zjistil, že *Bacterium tumefaciens* může migrovat na značné vzdálenosti od prvotního místa proniknutí. Riker (1941) též uvádí, že se bakterie mohou pohybovat na určitou vzdálenost cévními svazky, ale nemohou způsobovat nádory, dokud se nedostanou do parenchymatického pletiva. Hill (1928, 1930) však uvádí, že při takovém pohybu bakterie projdou za několik hodin pouze

1. Nádorová rakovina kořenů na sazenici třešně (JZD Lkenice) — Orig. — Root tumour canker on cherry plant (JZD Lkenice) — Orig.
2, 3. Dubové sazenice ze školky Vrchotovy Janovice, napadené nádorovou rakovinou kořenů — Orig. — Oak plants invaded by root tumour canker from the tree nursery Vrchotovy Janovice — Orig.

4. Elektronogram bakterie *Agrobacterium tumefaciens* izolované z nádorů na kořenovém krčku dubové sazenice, ze školky Vrchotovy Janovice. Zvětšeno cca 20 000 $\times$ — Orig. — The electronogram of *Agrobacterium tumefaciens* isolated from the tumours of root necks of oak plant from the tree nursery Vrchotovy Janovice. Enlarged cca 20 000 $\times$. — Orig.



několik mm, a proto je obtížné tímto způsobem vysvětlovat tvorbu druhotných nádorů, které vznikají ve velkých vzdálenostech od nádorů prvotních. Braun a White (1941, 1943) zjistili, že druhotné nádory ve vzdálenosti 10 cm od prvotního nádoru jsou v 83 % případů sterilní. Nádory ve vzdálenosti větší než 10 cm jsou prakticky všechny sterilní, neobsahují ani *Agrobacterium tumefaciens*, ani jakékoliv jiné průvodní bakterie. Tyto

nádory naroubované asepticky na jiné rostliny dávají vznik stejným nádorům, ale jenom na stejném druhu rostlin. Na rostliny jiného druhu je nelze přenést. Zde se tedy projevuje určitá specializace, která v případě, že vývoj nádoru závisí na infekci vegetativními buňkami *Agrobacterium tumefaciens*, neexistuje, jelikož tento mikroorganismus je polyfág.

Thimann (1966 — cit. podle Izraelského) vypracoval teorii o tvorbě nádoru při infekci *Agrobacterium tumefaciens* a též o tvorbě hlízec u vřkovitých působením růstových látek.

Avšak Locke (1938), Riker (1941) aj. autoři docházejí k názoru, že ačkoliv se kyselina β -indolyloctová vytváří v kulturách bakterie *Agrobacterium tumefaciens*, nemůže způsobovat tvorbu nádoru typu kořenové rakoviny (Crown galls, Wurzelhalsgallen, galles la couronne).

Proti Thimannově teorii svědčí i ta skutečnost, že *Bacterium radiobacter* tvoří velké množství růstových látek, avšak zanesli-li se umělým očkováním do pletiv rostlin, nikdy nevytvoří na rozdíl od *Agrobacterium tumefaciens* typické nádory.

V literatuře byly již uvedeny důkazy o virulenci filtrátů *Agrobacterium tumefaciens* a jejich schopnosti působit nádory. Též bylo zjištěno, že virulenci neboli schopnost vytvářet nádory je možno přenést i na nevirulentní kmeny *Agrobacterium tumefaciens*, dokonce i na *Bacterium radiobacter*, za podmínek kultivace uvedených bakterií ve sterilních filtrátech rostlinných nádorů nebo ve filtrátech virulentních kultur *Agrobacterium tumefaciens* (Klein D.T. — Klein R.M. 1953, 1956).

V. P. Izraelskij a kol. (1963) předpokládá, že rakovinnotvorné látky nejsou vylučovány bakteriemi, ale ani napadenými buňkami. Domnívá se, že vývoj druhotných nádorů je způsoben nějakým ještě neobjeveným virem, který je adsorbován na vegetativních buňkách a který se za určitých podmínek odděluje od bakterie, šíří se v rostlině a může způsobit na určitých místech proliferaci pletiv a rozvoj druhotných nádorů.

Nicméně ani on, ani pozdější autoři pro tuto hypotézu nepodali žádný důkaz. Všichni uvedení autoři se na filtráty bakterie *Agrobacterium tumefaciens* dívali jako na sterilní medium, které působí především látkami, které vytvářejí bakterie (kyselina β -indolyloctová, polymer DNK apod.).

ZÁVĚR

První důkazy o existenci bakteriálního virusu, a to nejen u bakterie *Agrobacterium tumefaciens*, ale i u jiných rakovinnotvorných bakterií (*Erwinia cancerogena*, *Aplanobacterium populi*, *Erwinia amylovora* a *Pseudomonas savastanoi*) jsem podal při podrobném studiu vzájemného vztahu bakterií *Erwinia cancerogena* Ur. a *Aplanobacterium populi* Ridé (Urošević 1973).

Podle našich šetření virulence jednotlivých kmenů bakterie *Agrobacterium tumefaciens* je závislá na přítomnosti speciálního bakteriálního virusu, bez bičíků, velikosti 24 nm. Pod vlivem virusu dochází nejdříve k rozpadu bičíků a později i buněčných stěn a k tvorbě poměrně pravidelných kulovitých filtrabilních částic, velikosti 50-500 nm. Svým tvarem silně připomínají částice mykoplasmy v pletivech rostlin, jak jsou vyobrazeny v některých publikovaných pracích.

Filtrabilní částice, které na svém povrchu mají ve velkém množství

adsorbovaný bakteriální virus, jsou schopny pronikat buněčnou blánou. Jádra napadených buněk se obvykle zvětšují a pod vlivem patogena se dělí na větší počet jader, která tvoří základ nádorových buněk. Tyto rychle se dělicí buňky připomínají buňky embryonální, nemohou se však dále diferencovat. Závěrem je možno říci, že přítomnost bakteriálního virusu a tvorba filtrabilních částic přímo ovlivňuje virulenci některých kmenů *Agrobacterium tumefaciens*, zejména proliferaci pletiv a tvorbu nádorů.

ZÁVĚRY PRO PRAXI

Nádorová rakovina kořenů je závažná choroba karanténní povahy. Pokud se choroba vyskytuje ojediněle je nejlépe při třídění sazenic všechny nemocné sazenice oddělit a spálit.

V případě, že jde o napadení zvláště cenného materiálu, je možno přistoupit i k terapeutickým metodám. Dobré výsledky dává ořezávání nádorů na postranních kořenech a následná dezinfekce poranění 1% roztokem modré skalice po dobu 5 minut a omytí vodou. Tuto metodu nelze však použít u sazenic, na nichž se nádory vyskytují v oblasti kořenového krčku. Takové sazenice je nejlépe zničit (spálit).

Ve školkách, kde se choroba vyskytuje, je účelné i sazenice bez zjevných příznaků napadení před odesláním ze školky dezinfikovat 1% roztokem modré skalice po dobu 5 minut a omýt vodou.

Při práci dodržujeme nutná hygienická opatření – nože a nářadí použité k ořezávání nádorů je nutno dezinfikovat po každém řezu apod.

Je účelné též provádět soustavný boj proti chroustům, drátovcům aj. hmyzu, jehož larvy okusují kořínky a působí tím šíření choroby.

V některých případech bylo dosaženo dobrých výsledků (zejména v USA) i při použití antibiotik – streptomycinu a surového (nečištěného) penicilinu. Zde jsou možné dvě varianty. Vstříkávání antibiotik do rostlin anebo obalení nádoru do vaty, smočené do roztoku nečištěného penicilinu. Zejména poslední způsob je lehce proveditelný a poměrně rentabilní: po terapii se růst nádoru omezuje, nádory hnědnou a začínají se rozpadávat.

V silně zamořených školkách je nutná i dezinfekce půdy. Nejjednodušší způsob je zapravování do půdy chlorového vápna v dávce až 150 g na 1 m². Dobré výsledky dává i vhodná kombinace hnojiv, zejména snížení dávky dusíkatých hnojiv a zvýšení dávky draselných a fosforečných solí.

Došlo dne 6. 2. 1976

Literatura

1. ARK, P. A. — SCOTT, C. E.: Elimination of crown gall. Calif. Agric. 5, 1951, s. 3
2. BAUDYŠ, E.: Nachrichten über die Krankheit und Schädlinge der Gewächse i. J. 1920 in Böhmen und Mähren. Odborná knihovna Praha, 1923, s. 1-64
3. BERGEY a kol.: Manual of Determinative Bacteriology. 1939, 5. vydání
4. BRAUN, A. C.: Development of secondary tumors and tumor strands in the crown gall of sunflowers. Phytopath. 31, 1941, s. 135-149
5. BRAUN, A. C.: Thermal studies on the factors responsible for tumor initiation in crown gall. Americ. Journal Bot. 34, 1947, s. 234-240
6. BRAUN, A. C.: Studies of the origin of the crown gall tumor cell i) Abnormal and pathological plant growth. Brookhaven Symposia in Biology 6, 1954, s. 115-127

7. BRAUN, A. C. — MANDLE, R. J.: Studies on the inactivation of the tumor-inducing principle in crown gall. *Growth* 12, 1948, s. 256-259
8. BRAUN, A. C. — WHITE, P. R.: Bacteriological sterility of tissues derived from secondary crown gall tumors. *Phytopath.* 33, 1943, s. 85-100
9. CHRISTOFF, A.: Crown gall on fruit trees in Bulgaria. *Rev. Inst. Rech. Agron. Bulg.* 10, 1940, s. 3-37
10. CONN, H. J.: Validity of the genus *Alcaligenes*. *Journ. Bact.* 44, 1942, s. 353-360
11. D'HERELLE, F. — PEYRE, E.: Contribution à l'étude des tumeurs expérimentales C. Rend. Acad. Sci. Paris, 185, 1927, s. 227-230
12. HILL, J. B.: The migration of *Bacterium tumefaciens* in the tissues of tomato plants. *Phytopath.* 18, 1928, s. 553-564
13. IZRAILSKIJ, V. P.: Die Erscheinung der Bakteriophagie (d'Herrellsches Phänom) und Pflanzenkrebs. *Ber. Bakt. Landw. Stat. Moskau* 24, 1926, s. 143-157
14. IZRAILSKIJ, V. P.: Bakteriophagie und Pflanzenkrebs. I. u. II. *Mittlg. Zentr. Bakt.* II, 67, 1926, s. 236-242 und 71, 1927, s. 302-311 *SZN* 1963, s. 1-492
16. KLEIN, D. T. — KLEIN, R. M.: Transmittance of tumor-inducing ability to avirulent crown gall and related bacteria. *J. Bact.* 66, 1953, s. 220-228
17. KLEIN, D. T. — KLEIN, R. M.: Quantitative aspects of transformation of virulence in *Agrobacterium tumefaciens*. *J. Bact.* 72, 1956, s. 308-313
18. KLEIN, R. M. — LINK, G. K. K.: The etiology of crown gall. *Quart. Rev. Biol.* 30, 1955, s. 207-277
19. LIESKE, R.: Das Krebsproblem vom Standpunkte der Pflanzenphysiologie und allgemeinen Bakteriologie. *Zentralbl. Bakt.* II, 74, 1928, s. 395-397
20. LIESKE, R.: Untersuchungen über die Krebskrankheit bei Pflanzen, Tieren und Menschen. I. u. II. *Mittlg., Zentralbl. Bakt.* I, 108, 1928, s. 118-146
21. LOCKE, S. B. — RIKER, A. J. — DUGGAR, B. M.: A growth hormone in the development of crown gall. *Phytopath.* 27, 1937 (Abstr.)
22. LOCKE, S. B. — RIKER, A. J. — DUGGAR, B. M.: Growth substance and the development of crown gall. *Journ. Agric. Res.* 57, 1938, s. 21-29
23. LOCKE, S. B. — RIKER, A. J. — DUGGAR, B. M.: Growth substance in crown gall. *Phytopath.* 28, 1938, s. 15 (Abstr.)
24. NEMEC, B.: Über Pflanzentumoren. *Arch. f. Experim. Zellforschg.* 6, 1928, s. 172-177
25. RIKER, A. J.: Studies of crown gall. *Phytopath.* 12, 1922, s. 55-56
26. RIKER, A. J. — BERCH, H. — DUGGAR, B. M.: Growth substance in crown gall as related to time after inoculation, critical temperature and diffusion. *Journal Agric. Res.* 63, 1941, s. 395-405
27. SMITH, E. F. — TOWSEND, C. O.: A plant tumor of bacterial origin. *Science* N. S. 25, 1907, s. 671-673
28. SMITH, E. F. — TOWSEND, C. O.: Ein Pflanzentumor bakteriellen Ursprungs. *Zentralbl. Bakt.* II, 20, 1907, s. 89-91
29. SMOLÁK, J.: Bakteriální tumory na ovocných stromech. *Ochrana rostlin*, 4, 1924, s. 2-6
30. STAPP, C.: Der Einfluß von T. S.-Hormon (Follikel Hormon) auf Tumorbildung und Gesamtentwicklung der mit *Pseudomonas tumefaciens* infizierten Wirtspflanzen. *Zentralbl.* 99, 1938, s. 116-123
31. STAPP, C.: Der derzeitige Stand unserer Kenntnisse über pflanzliche Tumoren. *Zentralbl. Bakt.* II, 107, 1953, s. 172-189
32. STAPP, C.: Bakterielle Krankheiten, in *Sorauer's Handbuch der Pflanzenkrankheiten*. Paul Parey 1956, s. 1-567
33. STAPP, C.: Pflanzenpathogene Bakterien. Paul Parey, 1958, s. 1-259
34. UROŠEVIĆ, B.: Relationships between *Erwinia cancerogena* Ur. and *Aplanobacterium populi* Ridé. *European Journal of Forest Pathology*, Band 3, Heft 2, 1973, s. 83-97

УРОШЕВИЧ, Б. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště - Strnady): Опухолевый рак корней лесных пород. *Lesnictví*, 23, 1977 (1) : 23-32.

Из рака корней дуба, ивы, черешен и диких оливок мы изолировали 5 штаммов бактерий, обладающие схожими морфологическими и биохимико-физиологическими свойствами.

Как показывают морфологические признаки, это — грамм-отрицательные, неспорулирующие палочки, упорядоченные по-отдельности или попарно. Жгутики большинства штаммов неясные, распадающиеся. С помощью электронной микроскопии, однако, можно наблюдать также 1—4-полярные жгутики.

Большинство штаммов желатин не разжижается даже спустя 30 дней. Но желатин 2 штамм спустя 1 месяц стали медленно разжижать, приобретая цилиндрическую форму. Обрат свертывается в мелких хлопьях, оседая на дно пробирки, а на поверхности остается прозрачный круг молочной сыворотки. Бромкresоловое молоко остается без изменений около 15 дней, потом слабо свертывается, и окраска индикатора становится неясной. У некоторых штаммов индикатор свидетельствует и о кислой реакции.

В растворе Ферми и Кона бактерии не растут. В растворе Ушинского — очень медленно, спустя 15 дней появляется слабая муть.

Редукция нитратов установлена у большинства штаммов, у двух — лишь слабые следы. Образование индола не обнаружено вовсе, а аммиака и сероводорода — у всех штаммов, причем у некоторых лишь спустя 2 недели и в слабой мере. Крахмал не гидролизруется.

Бактерии образуют кислоту без газа на глюкозе, маните, галактозе, мальтозе, дульците, фруктозе и рамнозе. Медленно заквашиваются сахароза, арабиноза, ксилоза, глицерин, сорбоза, раффиноза и, главное, лактоза. Ни у одного из штаммов не установлено заквашивания амилазы и декстрина.

По своим морфологическим и биохимико-физиологическим свойствам изолированные штаммы отвечают бактериям *Agrobacterium tumefaciens* (Smith et Town.) Conn., возбудителю опухолевого рака корней.

Так как мнения относительно возникновения как первичных, так и (особенно) вторичных опухолей (метастаз) расходятся, мы сочли целесообразным подробнее остановиться на этом вопросе. Согласно нашим исследованиям (Урошевич 1973 г.), вирулентность штаммов *A. tumefaciens* зависит от присутствия специального бактериального вируса, без жгутика, размером 24 нм. Под влиянием вируса сначала распадается жгутик, а потом и клеточные стенки, после чего образуются шаровидные фильтрабельные частицы правильной формы, размером 50—500 нм, сильно напоминающие по виду частицы микоплазмы в растительных тканях, как это изображается в некоторых публикациях.

Фильтрабельные частицы, на поверхности которых находится крупное количество адсорбированного бактериального вируса, способны проникать через клеточную оболочку. Ядра пораженных клеток, как правило, укрупняются и делятся под влиянием патогена на много ядер, которые и составляют базу для опухолевых клеток. Эти быстро делящиеся клетки напоминают эмбриональные клетки, но не способны к дальнейшей дифференциации. В заключение можно сказать, что присутствие бактериального вируса и образование фильтрабельных частиц непосредственно обуславливают вирулентность некоторых штаммов *A. tumefaciens*, в частности пролиферацию тканей и образование опухолей.

UROŠEVIĆ, B. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Straný): Tumour Canker of Forest Species Roots. Lesnictví, 23, 1977, (1) : 23-32.

We have isolated 5 strains of bacteria from root canker of oak, willow, cherries and wild olives which showed the same morphological and biochemical and physiological properties. According to morphological characteristics there are gram negative, unsporulating stamens, arranged separately or in couples. Majority of the strains have indistinct and decomposed flagella. But with the help of electronic microscopy it is possible to observe 1 to 4 polar flagella.

Most of the strains do not liquidize gelatine even in 30 days. In two strains occurred a slow cylindrical liquidizing of gelatine after two months. Centrifugally separated milk coagulates in small flakes and settles on the bottom of a test-tube while a translucent circle of whey stays on the surface. Bromocresol milk stays unchanged for about 15 days, then a slight coagulation and the change in colour of the indicator appears. In some strains the indicator shows even the acid reaction. The bacterium does not grow in Ferme-Cohn solution. It grows very slowly in Ushinsky solution, in which a slight disturbance occurs in 15 days.

Nitrate reduction has been found out in most of the investigated strains. Indole creation has been found out in none of the strains. Ammonia and hydrogen sulfide have been found out in most of the strains, though in some of them as long as after two weeks and in a low degree. Starch is not hydrolyzed.

The bacteria create the acid without gas on glucose, mannitol, galactose, maltose, dulcitol, fructose and rhamnose. Slower fermentation occurs at saccharose, arabinose, xylose, glycerin, sorbose, raffinose and especially lactose. At none of the investigated strains we have found out the fermentation of amygdalin and dextrin.

The isolated strains with their morphological and physiological-biochemical

properties answer the bacterium *Agrobacterium tumefaciens* (Smith et Town) Conn., the pathogen of the root tumour canker.

As the opinion on the origin of the primary and especially the secondary tumours (metastasis — according to medical terminology) varies, we have studied this problem in detail. According to our investigations (Urošević 1973) the virulence of the individual strains of *Agrobacterium tumefaciens* is in dependence on a presence of the special bacterium virus, without flagellum, size 24 nm. Owing to the virus, flagellum is the first that is being decomposed, the decomposition of cellular walls and regular globular filtrable particles of size 50–500 nm occurs later. With their shape they remind of mycoplasma particles in vegetable tissues, as they have been pictured in some studies already published.

The filtrable particles, which have the bacterium virus adsorbed in high degree on their surface, are able to penetrate the cellular membrane. The nuclei of the invaded cells usually grow bigger and under the influence of the pathogen they divide in higher amount of nuclei which create the basis of the tumour cells. These quickly dividing cells remind of the embryo cells, but are not able of further differentiation. It may be summed up that the presence of the bacterium virus and a creation of filtrable particles influences directly the virulence of some *Agrobacterium tumefaciens* strains, especially the tissue proliferation and tumour creation.

UROŠEVIĆ, B. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): Geschwulstkrebis der Wurzeln bei Waldhölzern. Lesnictví, 23, 1977 (1) : 23-32.

Von dem Wurzelkrebs der Eiche, Weide, Kirsche und den wildwachsenden Oliven haben wir insgesamt 5 Stämme der Bakterien isoliert, die die übereinstimmenden morphologischen und biochemisch-physiologischen Eigenschaften äußerten.

Nach den ermittelten morphologischen Zeichen handelt es sich um gram negative sporenunfähige Stäbchen, die einzeln oder im Paar geordnet werden. Bei den meisten Stämmen werden die Geißeln unklar, sie zerfallen. Mit Hilfe der Elektronenmikroskopie kann man auch 1 bis 4 polare Geißeln beobachten.

Die meisten Stämme machen die Gelatine auch nach 30 Tagen nicht flüssig. Bei zwei Stämmen kam es nach einem Monat zur langsamen zylindrischen Verflüssigung der Gelatine. Die Magermilch wird in feinen Flocken geronnen und setzt sich ab auf den Boden des Prüfglases und auf der Oberfläche bleibt ein transparenter Ring der Molke. Die Bromkresolmilch bleibt etwa 15 Tage ohne Veränderung, dann kommt es zum schwachen Gerinnen und unklarer Veränderung der Farbe von Indikator. Bei manchen Stämmen zeigt der Indikator auch saure Reaktion.

In der Fermise- und Cohn-Lösung wächst die Batterie nicht. In der Uschinski-Lösung wächst die Bakterie sehr langsam und nach 15 Tagen bildet sie eine schwache Trübung.

Die Reduktion von Nitraten haben wir bei den meisten Stämmen ermittelt. Bei zwei verfolgten Stämmen waren aber nur sehr schwache Spuren. Die Bildung von Indol haben wir jedoch bei keinen verfolgten Stämmen ermittelt. Die Bildung von Ammoniak und Schwefelwasserstoffsäure wurde bei allen Stämmen ermittelt, wenn auch bei manchen erst nach 2 Wochen und im geringeren Maße. Die Stärke wird nicht hydrolysiert.

Die Bakterien bilden die Säure ohne Gas auf Glukose, Manit, Galaktose, Maltose, Dulzit, Fruktose und Rhamnose. Langsamer werden Sacharose, Arabinose, Xylose, Glyzerin, Sorbose, Raffinose und vor allem Laktose vergärt. Bei keinem von den verfolgten Stämmen haben wir die Vergärung von Amygdalin und Dextrin ermittelt.

Mit ihren morphologischen und biochemische-physiologischen Eigenschaften entsprechen die isolierten Stämme der Bakterie *Agrobacterium tumefaciens* (Smith et Town.) Conn., dem Urheber des Geschwulstkrebis der Wurzeln.

Infolgedessen, daß es bisher keine einheitliche Ansicht über die Entstehung, wie der primären, als auch der sekundären Geschwulstes gibt, (nach der medizinischen Terminologie auch Metastasen genannt), hielten wir für zweckmäßig uns mit dieser Frage zu beschäftigen. Nach den Untersuchungen (Urošević 1973) ist die Virulenz einzelner Stämme von der Bakterie *Agrobacterium tumefaciens* abhängig von der Anwesenheit des speziellen bakteriellen Virus, ohne Geißel, in der Größe von 24 nm. Unter dem Einfluß von Virus kommt es zuerst zum Zerfall der Geißel und später auch der Zellenwände und zur Bildung von regelmäßigen kugelförmigen filtrabilen Teilchen, in der Größe von 50–500 nm. Durch ihre Form

erinnern sie an die Teilchen der Mykoplasma im Gewebe der Pflanzen, wie sie in manchen publizierten Arbeiten dargelegt werden.

Die filtrabilen Teilchen, die an ihrer Oberfläche eine große Menge vom bakteriellen Virus absorbiert haben, sind fähig durch die Zellenwand durchzudringen. Die Kerne von befallenen Zellen vergrößern sich gewöhnlich und unter dem Einfluß des Pathogens teilen sie sich auf eine größere Anzahl von Kernen, die den Grund der Geschwulstzellen bilden. Diese sich schnell teilenden Zellen erinnern an die embryonalen Zellen, sie sind aber nicht fähig sich weiter zu differenzieren. Zum Schluß kann man sagen, daß die Anwesenheit des bakteriellen Virus und die Bildung der filtrierbaren Teilchen, direkt die Virulenz mancher Stämme von *Agrobacterium tumefaciens* beeinflusst, vor allem die Proliferation der Gewebe und die Bildung der Geschwülste.

UROŠEVIĆ, B. (Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště-Strnady): Chancre tumoral des racines des essences forestières. Lesnictví, 23, 1977 (1) : 23-32.

C'est à partir du chancre des racines de chêne, de saule, de cerisier et d'oliviers sauvages qu'on a isolé au total cinq souches de bactéries dont les propriétés morphologiques et biochimico-physiologiques étaient identiques.

Selon les caractères morphologiques identifiés il s'agit des bâtonnets non sporulifères, organisés individuellement ou par couples. Les flagelles de la plupart des souches sont peu clairs et se désagrègent. Grâce à la microscopie électronique on peut cependant observer aussi des flagelles 1-4 polaires.

La plupart des souches ne liquéfient pas la gélatine, même si elles agissent pendant trente jours. Chez deux souches cependant, on a observé une liquéfaction cylindrique lente de la gélatine. Le lait écrémé coagule en petits flocons et se dépose au fond de l'éprouvette et à la surface reste un cercle transparent du peptit-lait. Le lait à brome-crésol demeure environ pendant 15 jours sans changements, après quoi on observe une précipitation faible et des changements peu clairs de la couleur de l'indicateur. Chez certaines souches l'indicateur montre aussi une réaction acide.

Dans la solution de Fermis et de Cohn la bactérie ne pousse pas. Dans la solution D'Ushinsky la bactérie pousse très lentement, formant au bout de quinze jours un faible trouble. Dans la plupart des souches nous avons identifié la réduction des nitrates dans deux souches examinées rien que des traces faibles. La formation de l'indol n'a été identifiée dans aucune des souches examinées. La formation de l'ammoniac et de l'hydrogène sulfuré a été identifiée dans toutes les souches, bien que dans certaines d'entre elles seulement au bout de deux semaines et au faible degré. L'amidon n'est pas hydrolysé.

Les bactéries forment l'acide sans gaz sur le glucose, la mannite, le galactose, le maltose, la dulcité, le fructose et le rhamnose. Plus lentement sont fermentés le saccharose, l'arabinose, le xylose, la glycérine, le sorbose, le raffinose et notamment le lactose. Dans aucune des souches examinées nous n'avons identifié la fermentation d'amygdaline et de dextrine.

Les propriétés morphologiques et biochimico-physiologiques des souches isolées répondent à la bactérie *Agrobacterium tumefaciens* (Smith et Town.) Conn. qui est l'auteur du chancre tumoral des racines.

Comme à présent il n'existe pas, et de loin, une opinion uniforme, relative à la naissance des tumeurs aussi bien primaires que notamment secondaires (que l'on appelle aussi, selon la nomenclature médicale, les métastes), nous avons considéré comme utile de s'occuper plus en détail de cette question. Selon nos investigations (Urošević 1973) la virulence des souches particulières de la bactérie *Agrobacterium tumefaciens* dépend de la présence d'un virus bactérien spécial, exempt de la flagelle, d'une grosseur de 24 nm. C'est par suite de l'influence de ce virus qu'a lieu tout d'abord la désagrégation de la flagelle et plus tard aussi celle des parois cellulaires et puis la formation des particules régulières sphériques filtrables d'une grosseur de 50-500 nm. Leur forme rappelle beaucoup les particules de mycoplasma dans les tissus des plantes, telles qu'on les représente dans certains travaux déjà publiés.

Adresa autora:

Ing. Branislav Urošević, CSc., Výzkumný ústav lesního hospodářství a myslivosti, Jíloviště - Strnady

ERGONOMICKÁ STUDIE VÝCHOVNÝCH ZÁSAHŮ VE SMRKOVÝCH A BUKOVÝCH MLAZINÁCH

A. Fiala

FIALA, A. (Lesnická fakulta VŠZ, Brno): Ergonomická studie výchovných zásahů ve smrkových a bukových mlazinách. Lesnictví 23, 1977(1) : 33-45.

Výchovné zásahy byly konány JMP Mini Homelite XL Automatic, křovinořežem Stihl FS 20, jednoruční obloukovou pilkou čs. výroby, pilkou ocaskou fy Life, sekyrkou Hypo s arboricidem Silvisar 510 a postřikovačem Nezmar s arboricidem EC 50. Podle výdeje energie na 1 ha a spotřeby času na 1 ha při stejné intenzitě zásahu (30%) se jeví jako nejvhodnější JMP Mini Homelite a křovinořež Stihl, a to jak u smrkových, tak i bukových mlazin. Projevuje se však u nich působení nepříznivých hygienických vlivů. S přihlédnutím k těmto okolnostem byl proveden návrh režimu pracovního dne, který vliv hygienických škodlivin snižuje na únosnou míru.

výchova porostů; mechanizace; arboricidy; hygienické vlivy

Výchova mladých lesních porostů se vlivem motorizovaného ručního nářadí, vlivem chemizace i ručního nářadí stává oblastí, kde není zcela jasno o vhodnosti jednotlivých druhů nářadí.

V podstatě by nová technika i technologie měly splňovat tyto obecné podmínky: snižovat podíl živé práce, zvyšovat kulturu a hygienu práce a z hospodářňovat výrobu. Protože je známo, že ne vždy se zavedením nové techniky sníží namáhavost práce a zvýší její kultura a hygiena, je nutno ji prověřit z hlediska ochrany zdraví pracujících.

Předmětem studie tedy bylo stanovení výdeje energie pracovníka provádějícího výchovné zásahy jednomužnou motorovou pilou Mini-Homelite, křovinořežem Stihl FS-20, pilkou ocaskou zn. Life, jednoruční obloukovou pilkou, arboricidem EC 50 aplikovaným postřikovačem Nezmar a arboricidem Silvisar 510 aplikovaným sekyrkou Hypo, dále stanovení koncentrace CO na pracovišti, stanovení hluku a chvění u motorizovaného nářadí a stanovení optimálního pracovního režimu pro vybrané pracovní prostředky.

METODIKA

Pro stanovení výdeje energie při práci s jednotlivým nářadím bylo použito parciální metody nepřímé kalorimetrie a pro hodnocení zatížení kardiovaskulárního systému sledování srdeční frekvence s jejím telemetrickým přenosem a záznamem na registrační pás. Při stanovení hluku a chvění bylo postupováno podle ČSN 01 1603 a 01 1390 a výsledky byly srovnány s nejvyššími přípustnými hodnotami stanovenými podle hygienických předpisů č. 32 (8) a č. 33 (7). Byla použita měřicí souprava fy Brüel a Kjaer, typ 2203 se vším příslušenstvím. Měření jsou konána na rukojetích JMP Mini-Homelite a křovinořežu Stihl FS 20.



1. Pracovník s polomaskou a Dgl. vakem pro odběr expirovaného vzduchu. — The worker with a demi-mask and a Dgl pouch for taking the expired air
2. U křovinořezu musel Dgl. vak nosit pomocník (motor za zády pracovníka). — The Dgl pouch at the brush killer had to be carried by an assistant

Koncentrace CO na pracovišti byla zjišťována kolorimetrickou metodou pomocí přístroje Labora Simplex.

Zdůrazňuje se, že všechny údaje výdeje energie jsou vedeny v tzv. netto kJ, zařazení prací podle stupně namáhavosti je provedeno podle čs. arbitrážní stupnice pro hodnocení práce mužů, časové údaje byly zjišťovány setinnými stopkami.

Vyšetřovanými osobami byli muži, kteří práce s jednotlivým nářadím profesionálně ovládali.



3. Sekyrka Hypo Hatchet pro aplikaci arboricidu Silvisar 510. — The axe Hypo Hatchet for the application of an arboricide Silvisar 510.
4. Měření hluku u JMP Mini Homelite. — Noise measuring at the JMP Mini Homelite

Pro stanovení výdeje energie u jednotlivého nářadí ve smrkových i bukových mlazínách bylo odebráno celkem 181 vzorků expirovaného vzduchu.

VÝSLEDKY MĚŘENÍ

Výchovné zásahy ve smrkových mlazínách vykonával pracovník F. J., 46 roků, výška 164 cm, hmotnost 61 kg, náležitá hodnota bazálního metabolismu 6075 kJ za 24 h, klidová hodnota srdeční frekvence 65 tepů za minutu.

Popis pracoviště: LZ Třebíč, polesí Zátíší, les. úsek Březiny, porost 106a2. Odrůstající kultura ze sadby, dřeviny jednotlivě i skupinovitě smíšené, místy mezery zarostlé maliníkem (cca 10 000 jedinců na 1 ha). Provozní cíl – sm 7, md 1, bo 1, kl 1.

Jednoruční oblouková pilka čs. výroby – průměrný naměřený výdej energie při práci 27,47 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 131 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako středně těžká.

Pilka ocaska fy Life – průměrný naměřený výdej energie při práci 30,39 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 141 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako středně těžká.

JMP Mini Homelite XL Automatic – průměrný naměřený výdej energie při práci 30,23 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 157 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako středně těžká.

Křovinořez Stihl FS 20 – průměrný naměřený výdej energie při práci 22,62 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 134 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako mírná až středně těžká.

Sekyrka Hypo-Hatchet s arboricidem Silvisar 510 – průměrný naměřený výdej energie při práci 28,34 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 132 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako středně těžká.

Postřikovač Mini-Nezmar s arboricidem EC 50 Spolana – průměrný naměřený výdej energie při práci 18,05 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 123 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako lehká. Nutno však připomenout, že aplikace pomocí postřikovače Mini-Nezmar vyžaduje dvou osob a tudíž výdej energie bude dvojnásobný při stejném výkonu.

Pořadí vhodnosti určitého prostředku závisí nejenom od již uvedeného výdeje energie za 1 min, ale také od výdeje energie na 1 ha a od časové spotřeby v minutách práce na 1 ha při stejné intenzitě zásahu (30 %) u všech sledovaných prostředků. Podle těchto hledisek je pořadí:

nářadí	(kJ na 1 ha)	
	výdej energie	čas (min na 1 ha)
1 křovinořez Stihl	7536	333
2 JMP Mini Homelite	9985	330
3 Hypo + Silvisar 510	10127	357
4 jednoruč. obloukovka	11497	418
5 ocaska Life	14277	470
6 Nezmar + EC 50	8030 (krát 2)	445 (krát 2)

Z hlediska energetického výdeje a spotřeby času při výchovném zásahu na ploše 1 ha jsou nejvhodnější křovinořez Stihl FS 20 a JMP Mini Homelite.

Výchovné zásahy v bukových mlazínách konal pracovník J. S., 44 roků, výška 172 cm, hmotnost 70 kg, náležitá hodnota bazálního metabolismu za 24 h 6665 kcal, klidová hodnota srdeční frekvence 58 tepů . min⁻¹.

Popis pracoviště: Školní lesní podnik Křtiny, polesí Bílovice, les. úsek Březina, porost 201a₂. Jde o bukovou mlazinu ve skupinách po celé ploše z náletu (cca 60 000 jedinců na 1 ha). Smrk, douglaska a jedle v hloučcích. Zastoupení: bk 70, sm 15, dgl 10, jd 5, jv, js, db, hb.

Jednoruční oblouková pilka čs. výroby – průměrný naměřený výdej energie při práci 22,02 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 107 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako mírná.

Pilka ocaska fy Life – průměrný naměřený výdej energie při práci 21,73 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 114 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako mírná až střední.

JMP Mini Homelite XL Automatic – průměrný naměřený výdej energie při práci 19,80 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 113 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako mírná.

Křovinořez Stihl FS 20 – průměrný naměřený výdej energie při práci 16,08 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 104 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako mírná.

Sekyrka Hypo-Hatchet s arboricidem Silvisar 510 – průměrný naměřený výdej energie při práci 22,52 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 111 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako mírná až středně těžká.

Postřikovač Mini-Nezmar s arboricidem EC 50 Spolana – průměrný naměřený výdej energie při práci 20,81 kJ . min⁻¹, průměrná srdeční frekvence 117 tepů . min⁻¹, práce hodnocena jako lehká až mírná. Znovu připomínáme technologickou nutnost aplikace dvěma osobami, takže výdej energie bude přibližně dvojnásobný.

Pořadí vhodnosti určitého nářadí, jak dříve uvedeno, závisí na výdeji energie na 1 ha a od spotřeby času na 1 ha (intenzita zásahu 30 %). Pořadí je pak toto:

nářadí	Výdej energie (kJ na 1 ha)	čas (min na 1 ha)
1 JMP Mini Homelite	14076	711
2 křovinořez Stihl	14503	902
3 Hypo + Silvisar 510	23571	1214
4 jednoruč. obloukovka	38137	1731
5 ocaska Life	54252	2499
6 Nezmar + EC 50	29295 (krát 2)	1409 (krát 2)

Podle tohoto pořadí je zřejmé, že situace je obdobná jako u smrkových mlazin, tj. že nejvhodnějším nářadím je JMP Mini Homelite a křovinořez Stihl FS 20.

Považujeme za nutné blíže vysvětlit rozdílnost energetického výdeje při práci v bukové a smrkové mlazině, konané stejným nářadím. Je pro to několik důvodů. Prvým záleží v charakteristice zpracovávaného materiálu mlaziny. Zatímco u smrkové mlaziny byli odstraňováni jedinci s průměrem v místě řezu 3,3 cm, v bukové mlazině to byli jedinci s průměrem v místě řezu 1,8 cm. Druhý je v rozdílu dvou různých vyšetřovaných osob. Třetí je dán počtem odstraňovaných jedinců. Zatímco ve smrkové mlazině vzniklé výsadbou při 30% zásahu bylo odstraněno 3000 jedinců na 1 ha, v bukové mlazině vzniklé náletem to bylo 20 000 jedinců. Tyto rozdíly

však nezneškodnocují výsledky, protože nešlo o srovnání obtížnosti mezi smrkovou a bukovou mlazinou, ale o srovnání jednotlivého nářadí mezi sebou a tohoto cíle bylo dosaženo.

STANOVENÍ NEPŘÍZNIVÝCH HYGIENICKÝCH VLIVŮ U NEJVHODNĚJŠÍHO NÁŘADÍ

Hluk je charakterizován jako nepravidelný, kdy změny se dějí naprosto nepravidelně a neočekávaně. Pro krátkost trvání hlučného intervalu nebylo možno provést oktávovou analýzu.

Práce při výchovných zásazích v mlazinách byla klasifikována jako fyzická práce bez nároku na duševní soustředění a sledování okolí sluchem. Pro tento druh činnosti je stanoveno nejvyšší přípustné číslo třídy hluku včetně korekce $N_p = 85$ pro oba druhy nářadí.

JPM Mini Homelite XL Automatic – hluk měřen 20 cm od pravého ucha pracovníka vykonávajícího práci, a to jak při hlučném (při řezu pily), tak i tichém (volnoběh pily) intervalu.

Při volnoběhu JMP průběh hladin akustického tlaku v jednotlivých oktávových pásmech ukazuje, že měřené hladiny v žádném pásmu nepřekročily stanovenou hodnotu čísla hluku $N_p = 85$.

Při řezu pily celková hladina akustického tlaku je 106 dB (poloha Lin). Hladiny hluku podle jednotlivých charakteristik jsou $A = 104$ dB, $B = 104$ dB, $C = 105$ dB. Všechny hodnoty přesahují nejvyšší přípustné číslo $N_p = 85$. JMP Mini Homelite nevyhovuje tedy čs. směrnícím. Při práci s ním je nutno používat osobní ochranné pomůcky chránící sluch.

Křovinořez Stihl FS 20 – hluk měřen 20 cm od pravého ucha pracovníka vykonávajícího práci, a to jak při hlučném, tak i tichém intervalu.

Při volnoběhu křovinořezu průběh hladin akustického tlaku v jednotlivých oktávových pásmech ukazuje, že pouze při frekvenci 250 Hz hladina akustického tlaku přesahuje nejvyšší přípustné číslo třídy hluku $N_p = 85$ o 2 dB.

Při řezu křovinořezem je celková hladina akustického tlaku 104 dB (poloha Lin přístroje). Hladiny hluku jednotlivých charakteristik jsou $A = 103$ dB, $B = 104$ dB, $C = 104$ dB. Všechny tyto hodnoty přesahují nejvyšší přípustné číslo hluku $N_p = 85$. Křovinořez nevyhovuje tedy čs. směrnícím a při práci s ním je nutno používat ochranné pomůcky chránící sluch.

Chvění – jeho doba trvání u JMP i křovinořezu kromě doby volnoběhu je velmi krátká. Tak krátká, že měření při řezu nám neskýtá dostatek času k dokonalému měření, čímž se rozumí, že není možno provést vyhodnocení v jednotlivých oktávových pásmech. Velký počet měření při řezu v jednotlivých oktávových pásmech podává nám však poměrně přesný obraz chvění rukojetí. Je to obraz sice pouze informativní, přesto dostatečně průkazný.

Práce byla klasifikována jako fyzická. Pro tuto fyzickou práci jsou stanoveny směrnice o ochraně zdraví před nepříznivým působením mechanického kmitání a chvění základní hladiny zrychlení chvění $L(a)$ z v dB, které pro jednotlivá oktávová pásma (jež můžeme přístrojem Brüel & Kjaer změřit) o středním kmitočtu 31,5 63 125 250 500 Hz včetně korekcí (část C směrní) jsou 120 130 135 135 135 dB. Tyto hodnoty platí pro přenos na ruce.

Měření byla konána na obou rukojetích vždy ve třech na sebe kolmých směrech.

JMP Mini Homelite XL Automatic – výsledky měření jsou shromážděny v tabulce I a II. Z přehledu naměřených hladin zrychlení chvění L (a) v dB v jednotlivých pásmech je patrné, že hodnoty zadní rukojeti ve všech třech na sebe kolmých směrech překračují hodnoty povolené, a to jak u volnoběhu, tak i při řezu s JMP. U přední rukojeti při volnoběhu ve frekvenci 31,5 Hz jsou překročeny hodnoty ve všech třech směrech, ve frekvenci 63 Hz ve směru předozadním, ve frekvenci 125 Hz ve směru pravolevém a ve frekvenci 250 Hz ve všech třech směrech. Při řezání je

I. Naměřené hodnoty zrychlení chvění L(a) v dB re. 10^{-6} m.s⁻² u JMP Mini Homelite, přední rukojeť. — Measured acceleration values of vibrations L(a) in dB re. 10^{-6} m.s⁻² at the JMP Mini Homelite — front handle

Volnoběh					
střední kmitočet	31,5	63	125	250	500
svislé	126	127	125	139	133
pravolevé	122	129	136	135	127
předozadní	141	135	133	139	131
Řezání					
svislé	119	133	139	151	153
pravolevé	116	128	154	144	149
předozadní	119	136	159	153	151

II. Naměřené hodnoty zrychlení chvění L(a) v dB re. 10^{-6} m.s⁻² u JMP Mini Homelite, zadní rukojeť. — Measured acceleration values of vibrations L(a) in dB re. 10^{-6} m.s⁻² at the JMP Mini Homelite — back handle

Volnoběh					
střední kmitočet	31,5	63	125	250	500
svislé	135	136	135	139	136
pravolevé	131	133	135	146	142
předozadní	140	143	136	138	142
Řezání					
svislé	141	144	164	153	153
pravolevé	133	140	167	156	153
předozadní	126	142	164	159	161

překročena většina hodnot, mimo frekvenční pásmo 31,5 Hz a chvění pravolevé v pásmu 63 Hz. Pila tedy nevyhovuje z hlediska chvění čs. směrnicím.

Křovinořez Stihl FS 20 – výsledky měření jsou shromážděny v tabulce III a IV. Z přehledu naměřených hladin zrychlení chvění L(a) v dB v jednotlivých oktávových pásmech je patrné, že hodnoty na levé rukojeti při řezání ve všech třech na sebe kolmých směrech překračují hodnoty povolené. Pravá rukojeť při řezání nepřekračuje povolené hodnoty v pásmu 31,5 Hz u chvění pravolevého a v pásmu 63 Hz u chvění svislého a předozadního. Chvění při volnoběhu na obou rukojetích překračuje povolené

III. Naměřené hodnoty zrychlení chvění L(a) v dB re. 10^{-6} m.s⁻² u křovinořezu Stihl FS 20, pravá rukojeť. — Measured acceleration values of vibrations L(a) in dB re. 10^{-6} m.s⁻² at the brush killer Stihl FS 20 — right handle

Volnoběh					
Frekvence	31,5	63	125	250	500
svislé	132	127	122	120	120
pravolevé	133	135	135	132	120
předozadní	135	131	126	123	125
Řezání					
svislé	128	126	151	135	135
pravolevé	116	131	153	149	140
předozadní	125	126	131	146	142

IV. Naměřené hodnoty zrychlení chvění L(a) v dB re. 10^{-6} m.s⁻² u křovinořezu Stihl FS 20, levá rukojeť. — Measured acceleration values of vibrations L(a) in dB re. 10^{-6} m.s⁻² at the brush killer Stihl FS 20 — left handle

Volnoběh					
Frekvence	31,5	63	125	250	500
svislé	135	136	127	119	114
pravolevé	133	139	135	127	119
předozadní	133	126	119	128	131
Řezání					
svislé	133	136	151	144	135
pravolevé	116	139	144	142	135
předozadní	126	133	153	149	142

hodnoty přibližně ve třetině případů (tabulka III a IV). Křovinořez z hlediska chvění nevyhovuje čs. směrnici.

Pro snížení nepříznivého působení chvění je bezpodmínečně nutno dodržovat ustanovení hlavního hygienika ČSR a při práci s motorizovaným nářadím přerušit práci 11 desetiminutovými přestávkami.

Koncentrace CO na pracovišti je velmi závislá na mnoha faktorech, mezi něž patří složení pohonné směsi, seřízení zapalování, celkový stav motorového prostředku, hustota a druhové složení mlaziny, směr a síla větru, ráz počasí atd.

Při měření byla pohonná směs připravena přesně podle návodu výrobce, byla provedena kontrola seřízení zapalování. Celkový stav JMP Mini Homelite i křovinořezu Stihl byl velmi dobrý.

Měření bylo konáno při běžném pracovním nasazení detektorem plynů zn. Labora Simplex III A s detekčními trubičkami na CO.

JMP Mini Homelite XL Automatic – naměřené hodnoty koncentrace ve vdechové zóně při práci ve smrkových mlazinách se pohybovaly v rozmezí 0,01 až 0,02 % CO a v bukové mlazině okolo 0,005 % CO.

Koncentrace CO ve smrkových mlazinách je velmi vysoká a hrozí nebezpečí otravy.

Křovinořez Stihl FS 20 – naměřené hodnoty koncentrace ve vdechové zóně při práci ve smrkových mlazinách se pohybovaly v rozmezí 0,003 až 0,004 % a v bukových mlazinách v rozmezí do 0,001 % CO.

Tyto podstatně nižší koncentrace proti JMP jsou způsobeny vhodnějším umístěním motoru křovinořezu za zády pracujícího a také vzpřímenou polohou při práci.

Pro snížení nepříznivé koncentrace CO na pracovišti je důležité dodržovat doporučení výrobce o údržbě motorizovaného nářadí, používat správného paliva i olejů, což se ve většině případů neděje. Tam, kde je to možné, vykonávat schematické zásahy, které daleko rychleji umožňují větrání mlaziny. Před každým začátkem práce, ale i během ní zjišťovat pohyb větru a pracovat vždy proti větru.

STANOVENÍ REŽIMU PRACOVNÍHO DNE U VYBRANÉHO NÁŘADÍ PŘI VÝCHOVNÝCH ZÁSAZÍCH VE SMRKOVÝCH MLAZINÁCH

Poněvadž celosměnový výdej energie přesahuje doporučenou hodnotu výdeje energie pro muže (7536 kJ), byl u JMP Mini Homelite a křovinořezu Stihl navržen režim pracovního dne, jehož cílem je nepřekročit uvedenou doporučenou hodnotu celosměnového výdeje energie, vložit do směny tolik přestávek, aby bylo splněno ustanovení hlavního hygienika ČSR o snížení nepříznivých účinků chvění na únosnou míru (tj. 11 desetiminutových přestávek) a rovnoměrně rozložit ve směně čas na práci i na odpočinek.

Při stanovení cyklu (tj. času práce a času oddechu) bylo postupováno podle Beny, tj. pro určitou délku trvání času práce se známým energetickým výdejem bylo zvoleno odpovídající procento oddechového času z času práce. Součet těchto dvou hodnot udává dobu trvání cyklu. Aby bylo dodrženo 11 přerušení práce ve směně, musí být těchto cyklů deset. K nim se připočítá čas přestávek a časy směnové práce T_C , které spolu dávají čas směnový T v délce 510 min.

Režim pracovního dne pro JMP Mini Homelite XL Automatic

Navržený cyklus 40 min (20 min práce, 20 min oddychový čas), čas přestávek 55 min, čas směnové práce 55 min, celkem 510 min.

Hodina	Činnost	Minuty	kJ
7,00 — 7,15	příprava náradí	15	94,20
7,15 — 7,35	práce s JMP	20	602,90
7,35 — 7,55	oddych	20	83,74
7,55 — 8,15	práce s JMP	20	602,90
8,15 — 8,20	dolévání PHM	5	31,40
8,20 — 8,35	oddych	15	62,80
8,35 — 8,55	práce s JMP	20	602,90
8,55 — 9,15	oddych	20	83,74
9,15 — 9,35	práce s JMP	20	602,90
9,35 — 10,15	přestávka (svačina)	40	167,47
10,15 — 10,35	práce s JMP	20	602,90
10,35 — 10,55	oddych	20	83,74
10,55 — 11,05	PHM, údržba	5	31,40
11,05 — 11,25	práce s JMP	20	602,90
11,25 — 11,45	oddych	20	83,74
11,45 — 12,05	práce s JMP	20	602,90
12,05 — 12,55	přestávka (oběd)	50	209,34
12,55 — 13,00	dolévání PHM	5	31,40
13,00 — 13,20	práce s JMP	20	602,90
13,20 — 13,40	oddych	20	83,74
13,40 — 14,00	práce s JMP	20	602,90
14,00 — 14,20	oddych	20	83,74
14,20 — 14,25	dolévání PHM	5	31,40
14,25 — 14,45	práce s JMP	20	602,90
14,45 — 15,05	předání práce	20	251,21
15,05 — 15,30	údržba JMP úklid náradí převléknutí	25	104,67
Celkem		510 min	7546,73 kJ

Režim pracovního dne pro křovinořez Stihl FS 20

Navržený cyklus 42 min (27 min práce, 15 min oddychový čas), čas přestávek 60 min, čas směnové práce 75 min, celkem 510 min.

Hodina	Činnost	Minuty	kJ
7,00 — 7,15	příprava náradí	15	94,20
7,15 — 7,42	práce s křovinořezem	27	610,44
7,42 — 7,57	oddych	15	62,80
7,57 — 8,24	dolévání PHM	27	610,44
8,24 — 8,44	oddych	5	31,40
8,44 — 9,11	práce s křovinořezem	15	62,80
9,11 — 9,26	práce s křovinořezem	27	610,44
9,26 — 9,55	oddych	15	62,80
9,55 — 10,18	práce s křovinořezem	27	610,44
10,18 — 10,23	přestávka (svačina)	25	104,67
10,23 — 10,50	dolévání PHM	5	31,40
10,50 — 11,05	práce s křovinořezem	27	610,44
11,05 — 11,32	oddych	15	62,80
11,32 — 11,37	práce s křovinořezem	27	610,44
11,37 — 11,52	dolévání PHM	5	31,40
	oddych	15	62,80

11,52 — 12,19	práce s křovinořezem	27	610,44
12,19 — 12,54	přestávka (oběd)	35	146,54
12,54 — 13,21	práce s křovinořezem	27	610,44
13,21 — 13,36	oddych	15	62,80
13,36 — 14,03	práce s křovinořezem	27	610,44
14,03 — 14,08	dolévání PHM	5	31,40
14,08 — 14,23	oddych	15	62,80
14,23 — 14,50	práce s křovinořezem	27	610,44
14,50 — 15,05	předání práce	15	314,01
15,05 — 15,30	údržba křovinořezu, úklid náradí, převléknutí	25	157,01
		510 min	7486,03 kJ

Na vysvětlenou k oběma návrhům režimu pracovního dne je nutno dodat, že uvedené časy přípravy a ukončení práce jsou převzaty ze skutečných časových snímků a vlastní přestávky v pracovním dnu jsou nutné proto, aby nebyla překročena doporučená hranice výdeje energie pro muže 7536 kJ ve směně.

SOUHRN

Na základě ergonomeckého šetření výchovných zásahů ve smrkových a bukových mlazínách parciální metodou nepřímé kalorimetrie a sledováním srdeční frekvence po stránce fyziologické a podle předpisů a norem po stránce hygienické bylo dosaženo těchto výsledků:

Výchovné zásahy byly konány JMP Mini Homelite XL Automatic, křovinořezem Stihl FS 20, jednoruční obloukovou pilkou čs. výroby, pilou ocaskou fy Life, sekyrkou Hypo s arboricidem Silvisar 510 a postřikovačem Nezmar s arboricidem EC 50. Podle výdeje energie na 1 ha a spotřeby času na 1 ha při stejné intenzitě zásahu (30 %) se jeví jako nejvhodnější JMP Mini Homelite a křovinořez Stihl, a to jak u smrkových, tak i bukových mlazín. Projevuje se však u nich působení nepříznivých hygienických vlivů.

Hluk — u obou prostředků při volnoběhu není překročena hodnota čísla hluku $N_p = 85$. Při řezu obou prostředků hladina hluku měřená na charakteristice A dosáhla hodnoty 104 dB (2). Nejvyšší přípustné číslo je podstatně překročeno, a proto při práci s tímto náradím je nutno používat osobní ochranné pomůcky chránící sluch.

Chvění — výsledky měření na rukojetích obou prostředků jsou shromážděny v tabulkách I — IV. Jak při volnoběhu, tak při řezání oběma vybranými prostředky dochází ve velké většině případů k překročení povolených hladin zrychlení chvění L (a) v dB. Proto při práci s JMP Mini Homelite a křovinořezem Stihl je třeba pro snížení nepříznivého působení chvění dodržet ustanovení hlavního hygienika ČSR a práci ve směně přerušit 11 desetiminutovými přestávkami.

Koncentrace CO na pracovišti — naměřené hodnoty ve vdechové zóně pracovníka při práci ve smrkových mlazínách se pohybovaly v rozmezí 0,01 až 0,02 % CO u JMP Mini Homelite. Tato koncentrace je nepřípustná a hrozí akutní nebezpečí otravy. U křovinořezu Stihl se koncentrace pohybovala v rozmezí 0,003 až 0,004 %. I tato koncentrace je vysoká, ale nikoliv nebezpečná. V bukových mlazínách k nebezpečné koncentraci CO nedochází.

S přihlédnutím ke všem těmto nepříznivým okolnostem byl proveden

návrh režimu pracovního dne, který vliv hygienických škodlivin snižuje na únosnou míru.

Pro JMP Mini Homelite XL Automatic se navrhuje 10 cyklů po čtyřiceti minutách (20 min práce, 20 min oddychový čas), čas přestávek 55 min, čas směnové práce 55 min, tj. celkem 510 minut.

Pro křovinořez Stihl FS 20 je navržený cyklus 42 min (27 min práce, 15 min oddychový čas), čas přestávek 60 min, čas směnové práce 75 min, tj. celkem 510 minut.

Došlo dne 6. 4. 1976

Literatura

1. BENA, E.: Fyziologická racionalizace práce. Kapitola z Fyziologie práce. Práce Bratislava; 1966
2. ČERMÁK, K.: Fyziologie, hygiena a bezpečnost práce v lesnictví. Studijní informace, ÚVTI Praha, 1968
3. FIALA, A.: Konstrukce lesopěstebních strojů z hlediska hygieny a bezpečnosti práce. Bezpečnost a hygiena práce v lesním hospodářství. Dům techniky Žilina, 1967
4. LEHMANN, G.: Arbeitsphysiologie. Band I. Handbuch der gesamten Arbeitsmedizin. Berlin, München, Wien 1961
5. ZELENÝ, A.: Metody studia energetického metabolismu, ventilace a cirkulace při fyzické práci. Kapitola z Fyziologie práce. Praha, Bratislava 1966
6. KOLEKTIV: Hluk na pracovišti. Práce, Bratislava 1967
7. KOLEKTIV: Hygienické předpisy MZd č. 33. Směrnice o ochraně zdraví před nepříznivým působením mechanického kmitání a chvění (vibrací). Praha 1967
8. KOLEKTIV: Hygienické předpisy MZd č. 32. Směrnice o ochraně zdraví před nepříznivými účinky hluku. Praha 1967

ФИЛА, А. (Lesnická fakulta VŠZ, Brno): Эргономическое исследование рубок ухода в еловом и буковом молодняке. Лесnictví, 23, 1977 (1): 33-45.

Уход проводился моторной пилой одиночного управления Мини Гомелите XL Автоматик, кусторезом Стил FS 20, лучковой пилой одиночного управления чехословацкого производства, пилой-ножовкой фирмы Лайф, топором Гипо с арборизидом Силвисар 510 опрыскивателем Незмар с арборизидом ЕС 50. Согласно расходу энергии на 1 га и затрате времени на 1 га при одинаковой интенсивности ухода (30 %) наиболее подходящей является моторная пила одиночного управления Мини Гомелите и кусторез Стил, а именно как в еловых, так и в буковых молодняках. Однако, в них проявляется действие неблагоприятных гигиенических влияний.

Шум — у обоих средств при холостом ходу — не превышает значения $N_p = 85$. При разрезе уровень шума обоих средств, измеряемый в характеристике А, достиг значения 104 дБ (А). Максимально допустимый уровень существенно превышен и поэтому при работе с этим орудием необходимо пользоваться специальным средством для глушения шума.

Вибрация — результаты измерения на рукоятках обоих средств приведены в таблицах I—IV. Как при холостом ходу, так и при работе с обоими выбранными средствами в большинстве случаев превышает допустимый уровень ускорения вибрации L (a) в дБ. Поэтому при работе с моторной пилой одиночного управления Мини Гомелите и кусторезом Стил для уменьшения неблагоприятного действия вибрации необходимо соблюдать правила главного санработника ЧСР и работу в сменах выполнять с 11 десятиминутными паузами.

Концентрация СО при работе в местности — измеренные значения в зоне при работе в еловом молодняке находились в диапазоне 0,01 %—0,02 % СО у моторной пилы одиночного управления Мини Гомелите. Такая концентрация недопустима и угрожает острым отравлением. У кустореза Стил эта концентрация находилась в диапазоне 0,003—0,004 %. Эта концентрация тоже высокая, но не так опасна. В буковых молодняках концентрация СО безопасна.

Поэтому для моторной пилы одиночного управления Мини Гомелите XL Автоматик рекомендуются 10 циклов по 40 минут (20 мин работы, 20 мин отдыха), время перерыва 55 мин, время сменной работы 55 мин, т. е. всего 510 мин.

Для кустореза Стил FS 20 рекомендуется цикл 42 минуты (27 мин работы, 15 мин отдыха), время перерыва 60 мин, время сменной работы 75 мин, т. е. 510 мин.

FIALA, A. (Lesnická fakulta VŠZ, Brno): The Ergonomic Study of Improvement Treatments in Spruce and Beech Young Stands. *Lesnictví*, 23, 1977 (1) : 33-45.

The improvement treatments were carried out by the JMP Mini Homelite XL Automatic, the brush killer Stihl FS 20, the one hand bow saw of the Czech origin, the drag saw fy Life, the axe Hypo with an arboricide Silvisar 510 and the sprayer Nezmar with an arboricide EC 50. The most suitable, according to energy input and time requirement per 1 hectare at the same intensity of the treatment (30%), seems to be the JMP Mini Homelite and the brush killer Stihl both in spruce and beech young stands. But the unfavourable hygienic influences appear there, too.

Noise — The value of noise number N_p 85 at the free wheel is overreached at none of the means. The noise level at the cut measured on characteristic A reached the value 104 dB (A). The highest admissible number is considerably overreached there and at work with these instruments it is necessary to use personal means protecting the hearing.

Vibrations — the results of measuring on handles of both means are gathered in Tables I, II, III and IV. Both at the free wheel and the cutting with these means it comes about in majority of cases to overreaching the admissible acceleration levels of vibrations L (a) in dB. Therefore at working with the JMP Mini Homelite and the brush killer Stihl it is necessary, in order to lower the unfavourable vibrations, to keep provisions of the main hygienic and to make 11 ten minute intervals per shift.

CO concentration at worksite — the measured values in the air-zone of the worker during the work in spruce young stands varied within 0.1% to 0.2% CO at the JMP Mini Homelite. Such concentration is not admissible and there is the acute danger of poisoning. Concentration at the brush killer Stihl varied within 0.003 to 0.004%. This concentration is high, but not dangerous. CO concentration does not occur in beech young stands.

For the JMP Mini Homelite XL Automatic there are suggested 10 cycles 40 minutes each (20 minutes — work, 20 minutes interval), intervals time 55 minutes, shift time 55 minutes, i. e. 510 minutes together.

The suggested cycles for the brush killer Stihl FS 20 is 42 minutes (27 minutes — work, 15 minutes — interval), intervals time 60 minutes, shift time 75 minutes, i. e. 510 minutes together.

FIALA, A. (Lesnická fakulta VŠZ, Brno): Ergonomische Studien der Pflegeeingriffe im Fichten- und Buchenjungwuchs. *Lesnictví*, 23, 1977 (1) : 33-45.

Die Pflegeeingriffe wurden mit EMS Mini Homelite XL Automatic, mit dem Buschschneider Stihl FS 20, mit der Einhandbügelsäge der tschechoslowakischen Herstellung, mit der Fuchsschwanzsäge der Fa „Life“, mit der Hacke „Hypo“ mit Arborizid „Silvisar 510“ und mit dem Regner „Nezmar“ mit Arborizid EC 50 durchgeführt. Nach der Energieausgabe pro 1 ha und nach dem Zeitverbrauch pro 1 ha bei gleicher Intensität der Eingriffe (30%) scheinen als geeignetste EMS Mini Homelite und der Buschschneider Stihl zu sein und das sowohl im Fichten- als auch im Buchenjungwuchs. Es äußert sich bei ihnen die Wirkung ungünstiger hygienischer Einflüsse bemerkbar.

Geräusch — beim Freilauf der beiden Arbeitsmittel wird der Wert des Geräusches $N_p = 85$ nicht überschritten. Beim Schnitt beider Arbeitsmittel erreichte der Geräuschpegel, gemessen auf der A Charakteristik, 104 dB (A). Die höchstzulässige Grenze wird wesentlich überschritten, und deswegen ist es nötig, bei der Arbeit mit diesem Gerät die persönlichen Schutzmittel, die das Gehör schützen, anzuwenden.

Vibration — die Messungsergebnisse auf den Handgriffen beider Arbeitsmittel werden in den Tabellen I, II, III und IV zusammengefaßt. Sowohl bei dem Freilauf, als auch beim Schneiden mit beiden ausgewählten Mitteln kommt es in den meisten Fällen zum Überschreiten der erlaubten Pegel der Beschleunigung von Vibration L (a) in dB. Deswegen ist es nötig, bei der Arbeit mit EMS Mini Homelite und mit dem Buschschneider Stihl für die Senkung der ungünstigen Wirkung von Vibration die Bestimmung des Haupthygienikers der ČSR einzuhalten und die Arbeit durch 11 Zehnminutenpausen unterbrechen.

Die Konzentration von CO auf dem Arbeitsplatz — die abgemessenen Werte in der Luftzone des Arbeiters bei der Arbeit im Fichtenjungwuchs haben sich im Bereich zwischen 0,01% bis 0,02% von CO bei EMS Mini Homelite bewegt. Diese

Konzentration ist unzulässig und es droht eine akute Gefahr von Vergiftung. Beim Buschschneider Stihl hat sich die Konzentration im Bereich von 0,003 bis 0,004⁰/₀ bewegt. Auch diese Konzentration ist hoch, aber nicht gefährlich. Im Buchenjungwuchs kommt es zur gefährlichen Konzentration von CO nicht.

Für EMS Mini Homelit XL Automatic werden 10 Zyklen nach 40 Minuten (20 Minuten Arbeit, 20 Minuten Ruhepause) vorgeschlagen. Die Zeit der Pausen beträgt 55 Minuten, die Zeit der Schichtarbeit 55 Minuten, d. i. insgesamt 510 Minuten.

Für den Buschschneider Stihl FS 20 wird ein Zyklus von 42 Minuten vorgeschlagen (27 Minuten Arbeit, 15 Minuten Ruhepause) die Zeit der Pausen ist 60 Min., die Zeit der Schichtarbeit 75 Min., d. i. insgesamt 510 Minuten.

FIALA, A. (Lesnická fakulta VŠZ, Brno): Etude ergonomique des mesures d'éducation appliquées aux jeunes peuplements d'épicéa et de hêtre. Lesnictví, 23, 1977 (1) : 33-45.

Les mesures d'éducation ont été effectuées à l'aide de la scie à un homme Mini Homelite XL Automatic, à l'aide de la débroussailleuse Stihl FS 20, à l'aide de la scie à arc a une main de production tchécoslovaque, à l'aide de la scie égohine de la firme Hypo et enfin à l'aide de l'arbocide Silvisar 510 et un moyen de pulvérisateur Nezmar, épandant l'arboricide EC 50. Selon la dépense de l'énergie par 1 hectare et la consommation du temps par 1 hectare à intensité égale d'intervention (30 p. 100), c'est la scie à 1 homme Mini Homelite et la débroussailleuse Stihl qui paraissent comme les plus convenables, et cela aussi bien pour les jeunes peuplements d'épicéa que pour les jeunes peuplements de hêtre. Ce qui se manifeste cependant en les utilisant, c'est l'action de leurs influences défavorables.

Bruit — pour les deux moyens la valeur de l'indice de bruit $N_p = 85$ n'est pas dépassée pendant la marche à vide. Pendant la coupe des deux appareils le niveau de bruit, mesuré sur la caractéristique A, a atteint la valeur de 104 dB (éA). L'indice le plus élevé admissible est par conséquent sensiblement dépassé et c'est ainsi qu'il faut procéder, en employant les outils en question, à l'utilisation des moyens de protection personnels qui protègent l'ouïe.

Vibrations — les résultats des mesures sur les poignées des deux outils sont réunis aux tableaux 1, 2, 3 et 4. Les deux moyens choisis ont pour conséquence, aussi bien pendant la coupe, qu'on dépasse le niveau d'accélération admis de vibrations L (a) en dB. C'est ainsi qu'en utilisant la scie à un homme Mini Homelite et la débroussailleuse Stihl il est nécessaire, pour réduire l'action défavorable des vibrations, de respecter les dispositions de l'hygiéniste principal de la République socialiste tchèque et d'interrompre le travail dans l'équipe en ménageant des arrêts de travail de dix minutes.

Concentration de l'oxyde de carbone (CO) sur le lieu de travail — les valeurs mesurées dans la zone aérienne du travailleur pendant le travail dans les jeunes peuplements d'épicéa variaient dans les limites entre 0,01 p. 100 et 0,02 p. 100 d'oxyde de carbone, quand on utilisait la scie à un homme Mini Homelite. Cette concentration est inadmissible, car on court le risque d'une intoxication aiguë. En ce qui concerne la débroussailleuse Stihl, la concentration variant dans les limites entre 0,003 et 0,004 p. 100. Même cette concentration est élevée, mais non pas dangereuse. Dans les jeunes peuplements de hêtre on ne rencontre pas des concentrations dangereuses d'oxyde de carbone (CO).

Pour la scie à un homme Mini Homelite XL Automatic on recommande 10 cycle à raison de quarante minutes (20 minutes de travail, 20 minutes de temps de repos), un temps d'arrêt de 55 minutes et un temps de travail de 55 minutes dans l'équipe, c'est-à-dire au total 510 minutes.

Pour la débroussailleuse Stihl FS 20 on recommande le cycle de 42 minutes (27 minutes de travail, 15 minutes de temps de repos), un temps d'arrêt de 60 minutes, un temps de travail de 75 minutes dans l'équipe, à savoir au total 510 minutes.

Adresa autora:

Ing. Alfons Fiala, lesnická fakulta VŠZ, Brno

LESNICKÉ ŠKOLSTVÍ A VÝZKUM V NORSKU

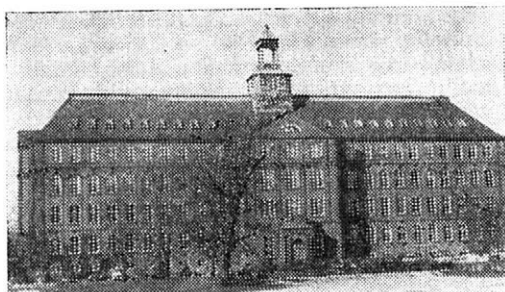
Norsko náleží k předním lesnický vyspělým zemím Evropy. Z celkové rozlohy tohoto státu připadá 7 025 800 ha na lesní půdu (22 %). Většina norského vnitrozemí má boreální (tajgový) charakter lesů, sever náleží k subarktické a arktické zóně, jih Norska se řadí do smíšených severoevropských lesů. K nejvíce zastoupeným dřevinám patří smrk ztepilý (*Picea excelsa*), borovice lesní (*Pinus silvestris*) a břízy (*Betula pubescens* a *B. verrucosa*). Z celkového ročního přírůstu 13 miliónů m³ v Norsku připadá 50 % na smrk, 30 % na borovici a 20 % na listnáče. Roční těžba dřeva se pohybuje kolem 8 až 9 miliónů m³.

Vlastnictví lesů v Norsku je velmi komplikované. Dělí se na čtrnáct skupin, které lze pro stručnost sloučit do tří základních kategorií. Na soukromé lesy připadá 73,1 %, na kolektivní 8,6 % a na státní 18,3 %. Více než 60 % majitelů lesů vlastní i zemědělské pozemky. Přes převahu soukromého vlastnictví lesů je lesnictví řízeno státem prostřednictvím různých orgánů, které dohlíží na plnění zákonů a zákonných opatření. Ředitelství státních lesů se dělí na 4 lesnické oblasti a 31 lesních okresů (správ). V těchto řídicích orgánech, v lesnickém provozu a výzkumu pracují lesníci, kteří jsou převážně školeni na lesnických školách v Norsku.

LESNICKÉ ŠKOLSTVÍ

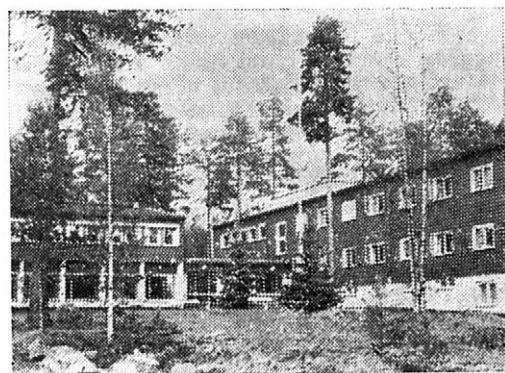
Počátky lesnického školství v Norsku se kládou do roku 1875. V té době zřídila vláda několik lesnických škol nižších stupňů. Vysokoškolské lesnické vzdělání bylo zavedeno v roce 1898 zřízením lesnického oddělení na Vysoké škole zemědělské v městečku Ås, které se nachází asi 35 km jihovýchodně od hlavního města Oslo. Před tím studovali norští lesníci vysoké školy v Německu a Švédsku. Pravidelné školení lesních dělníků bylo zavedeno v roce 1945 zřízením první školy v Solør.

V současné době je při Vysoké škole zemědělské v Ås lesnická fakulta (obr. 1). Fakulta má asi 60 pracovníků, z toho 5 profesorů a 30 pedagogicko-výzkumných pracovníků. Studium je pětileté.



1. Jedna z budov Vysoké školy zemědělské, v níž je umístěna lesnická fakulta

Dělí se na pět oddělení: ekonomika, hospodářská úprava lesů a dendrometrie, těžba a ergonomika, pěstování lesů, technologie dřeva. K fakultě náleží asi 150 ha školních lesů a malé arboretum. Střední stupeň lesnického školství je dvouletý. Absolventi se nazývají lesními techniky. V současné době jsou v Norsku dvě soukromé střední školy v Evenstad a Steinkjer a jedna nezávislá lesnická škola Brandbu v kraji Oppland. Posledně zmíněná škola slavila v roce 1975 dvacet pět let svého trvání. Studují zde studenti, kteří mají 21 – 22 let. Před vstupem na školu prošli několikaletou praxí v lesnickém provozu. Přijímají se sem i absolventi gymnázií, kteří před vstupem na tuto školu prodělávali jednoletou pra-



2. Škola pro lesní dělníky Yrkess

xi. Absolventi střední lesnické školy v Brandbu jsou někdy přijímáni do druhého ročníku lesnické fakulty v Ås. Jedna třetina času dvouletého studia je věnována praktické práci. K tomu účelu má škola k dispozici les o rozloze 2000 ha.

Lesní dělníci jsou školeni v nové jednolété škole v Yrkess (obr. 2). Jsou sem přijímáni absolventi základních škol. Více než polovina času se věnuje praktické výuce. Mimo jiné je škola vybavena dílnami, různým zařízením a mechanizací včetně 15 traktorů a setřasače šišek. Studenti ročně těží asi 4000 m³ dřeva. Pro starší, asi 19leté dělníky se studium zkracuje na 6 měsíců. Pořádají zde i krátkodobé 5-6týdenní kursy, kde hlavní náplň tvoří problematika probírek. Tato škola má kromě ředitele 7 učitelů, z nichž 2 mají vysokoškolské a 6 středoškolské lesnické vzdělání.

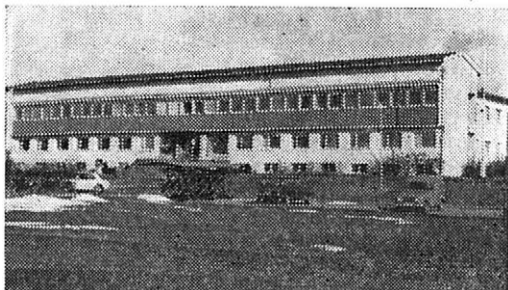


3. Institut pro krátkodobé lesnické kursy Honne

V Honne je moderní institut pro krátkodobé lesnické kursy (obr. 3). Nachází se v blízkosti největšího norského jezera Mjøsa. Budova institutu má 30 místností se 60 lůžky včetně reprezentačního prostoru a vlastní tiskárny. Dva konferenční sály jsou vybaveny moderní audio-vizuální technikou. Za rok zde proběhne asi 30–40 krátkodobých kursů v trvání 2–14 dnů, při nichž se vyškolí 500 až 600 i více posluchačů, a to lesníků i učitelů. Do programu kursů jsou zařazována rozličná témata od ekologie, přes pěstování, těžbu dřeva, ekonomiku, plánování až po řízení. Největší část nákladů na provoz institutu hradí stát, 1/3 objednatelé a menší díl je kryt z příspěvků různých institucí.

LESNICKÝ VÝZKUM

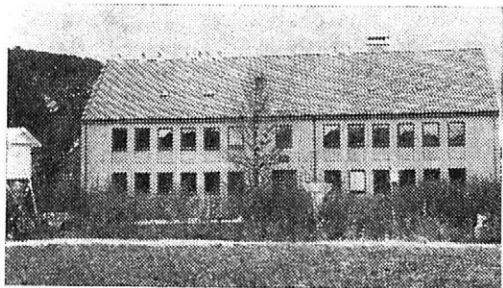
Norský lesnický výzkum je reprezentován Výzkumným ústavem lesnickým (NISK) v Ås (obr. 4), výzkumnou stanicí



4. Výzkumný ústav lesnický v Ås (NISK)

Stend na západním pobřeží a lesnickou fakultou v Ås. NISK byl založen 13. června 1917. Pracuje v něm asi 130 lidí, z toho 45 vysokoškoláků. V současné době se dělí na těchto 7 oddělení: ekologii, genetiku a šlechtění, hospodářskou úpravu lesů a ekonomiku, patologii a entomologii, obnovu lesa, těžbu a ergonomii, technologii a zpracování dřeva. Navíc je zde administrativní oddělení a specialista pro matematiku a statistiku. Na oddělení ekologie se řeší zejména klíčení semen v závislosti na ekologických podmínkách, rozklad humusu, mikroklimatická problematika, obnova lesů na rašelinných půdách, hnojení, studium dřevin při horní hranici lesa a zalesňování zamokřených půd. Pracovníci oddělení genetiky a šlechtění se zabývají zejména semennými plantážemi, provenienčními pokusy se smrkem a borovicí, křížením bříz *Betula nana* a *B. verrucosa* a šlechtěním. Významné jsou provenienční pokusy s osivem ze střední a východní Evropy. Na oddělení hospodářské úpravy vyhodnocují růst a přírůst na pokusných plochách v celé zemi, vypracovávají hmotové tabulky pro břízu (Braastad 1962, 1967), borovici (Brantseg 1967, 1969), smrk ztepilý (Vestjordet 1967). Sledují i vliv hnojení lesů na přírůst, zpracovávají systém probírek v mladších porostech, jakož i vztah mezi sponem sazenic, růstem a škodami sněhem. Na oddělení patologie a entomologie se zabývají studiem houbových nemocí (zejména *Fomes annosus*), houbovými nemocemi na skládovaných sazenicích, imisemi, škodami na porostech v okolí hliníkových továren, vlivem technického poškození stromů na houbové nemoci aj. Entomolo-

gové sledují problematiku škod hmyzem na šíškách a v plantážích, škody na dřevě, které způsobuje *Hylotrupes bajulus*, jakož i otázky biologického boje. Na oddělení obnovy lesa se zabývají školkařstvím, přirozenou a umělou obnovou a zalesňováním. Sledují možnosti posunu horní hranice lesa, přeměnu listnatých (převážně březových) porostů na jehličnaté, zkoušejí pěstování exot zejména *Picea sitchensis*, *P. engelmannii*, *Abies lasiocarpa*, *Pinus contorta* a *Larix sibirica*. Řeší i problematiku skladování, balení a dopravy sazenic, mechanizovanou sadbu, růst kořenů sazenic ve vztahu k celé rostlině aj. Na oddělení těžby dřeva vedeném prof. I. Samsetem řeší problematiku mechanizované těžby dřeva, testují nářadí a stroje, mechanizaci probírek, dopravu dřeva lanovkami a vrtulníky a mechanizaci zalesňovacích prací. Navíc konají časové a fyziologické studie. Pro venkovní práce mají k dispozici výzkumnou stanici Hurdal o celkové rozloze 950 ha lesa a Kviteseid se 750 ha lesa. Na oddělení technologie a zpracování dřeva se zabývají ochranou proti dlouhodobému skladování, měřením dřeva, vývojem zařízení na měření (prodej) dřeva podle hmotnosti, jakož i problematikou strojů na zpracování dřeva. Součástí výzkumného ústavu NISK je i ústav pro hospodářskou úpravu lesů.



5. Výzkumná stanice lesního hospodářství i Stend. Snímky Skoupý

Výzkumná stanice Stend (obr. 5) se nachází asi 17 km jižně od Bergenu. Je to vlastně první výzkumný ústav lesnický v Norsku, založený v roce 1915, který je dnes součástí výzkumného ústavu v Ås. Původně měl sídlo v Bergenu a byl dotován lesnickými společnostmi. Od

roku 1949 je financován vládou. V roce 1956 byl převeden z Bergenu do Stend. V současné době zde pracuje asi 30 lidí. Výzkumná stanice Stend má tři oddělení (sekce): přírodních věd, výnosovosti a pěstování lesů a obnovy lesů. Hlavní pozornost je soustředěna na zalesňování jihozápadní přímořské oblasti Norska. Tato problematika se řeší komplexně od sběru (dovozu) osiva domácího i z mnoha států světa, přes pěstování ve školkách, zakládání provenienčních ploch, melioraci zamokřených půd, hnojení, houbové nemoci, spony sazenic až po probírky a výnosová studia. Ověřují zde 25 rumunských a 40 středoevropských proveniencí smrku ztepilého (mimo jiné i z ČSSR), 50 proveniencí duglasky, 90 proveniencí *Pinus contorta*. Z dalších exot zkoušejí *Picea sitchensis*, *P. glauca*, *P. omorika*, *P. mariana*, *Abies alba*, *A. grandis*, *A. procera*, *Pinus contorta* a *Tsuga heterophylla*. Jsou zde i mezinárodní pokusné plochy se smrkem organizované O. Langletem ze Stockholmu, kde je soustředěno 1100 proveniencí. Z houbových nemocí se velká pozornost věnuje *Fomes annosus*. Vyhodnocují zde 40 pokusných ploch hnojených NPK, v některých případech kombinovaných s mechanickou přípravou půdy. Výnosová studia konají na 600 pokusných plochách.

Dílčí výzkumnou problematiku řeší i pedagogicko-vědeckí pracovníci lesnické fakulty Vysoké školy zemědělské v Ås. O. Børset řeší introdukci dřevin, přirozenou obnovu a prořezávky, O. Haavera a en odvodňování, hnojení a zalesňování rašelinišť, M. Haugberg provenienční problematiku a zalesňování. A. Langhammer šlechtění a pěstování listnáčů, zejména osiky, břízy a topolů, J. Kielland-Lund ekologii. Problematikou hospodářské úpravy lesů se zabývá S. Nersten, ekonomikou F. Jørgensen, technologií dřeva F. Stemsrud a L. Nagoda.

V roce 1923 byl v Norsku zřízen Výzkumný ústav pro papír a celulózu. Nachází se v Oslo (čtvrť Blindern). Má přes 100 zaměstnanců, kteří pracují s vysoce specializovaným vybavením. Tento ústav je financován státem a soukromými institucemi. V roce 1949 byl založen Výzkumný ústav dřevařský a technologický (NTI). Má tyto sekce: anatomie dřeva, sušení dřeva, ochranu, využití, konstrukce, lepení a technických informací.

Doc. Ing. Jiří Skoupý, CSC., Vědecký lesnický ústav VŠZ, Kostelec nad Černými lesy

ČTVRTÝ CELOSTÁTNÍ DIPTEROLOGICKÝ SEMINÁŘ

Každým druhým rokem se scházejí dipterologové, kteří se zabývají profesionálně i amatérsky studiem dvoukřídlého hmyzu, aby se navzájem informovali o pokroku i metodách studia ve svém oboru a zveřejnili nové aktuální poznatky v obecných i aplikovaných směrech této vědy. Po prvním semináři v Nitře následoval druhý seminář v Českých Budějovicích, pak se uskutečnil mimořádný seminář věnovaný speciálně metodám studia hospodářsky důležitých skupin dvoukřídlého hmyzu 11. 4. 1973 v Ústavu vědeckotechnických informací v Praze, třetí seminář byl v listopadu 1973 v Cikháji u Žďáru nad Sázavou a obsáhlý referát V. Martinka o rozvoji aplikované lesnické dipterologie v poválečném období, jejím současném stavu a dalších úkolech, přednesený na tomto semináři, vyšel v časopise Lesnictví 20/1974 v č. 3 a 4. Čtvrtý seminář se konal 11.–14. listopadu 1975 v Dubové při Modré u Bratislavy.

Četné referáty se dotýkaly přímo i nepřímo též lesnické tematiky. Např. příspěvek J. Máry o československých družích čeledi *Odinidae* jednal o čeledi mušek u nás dosud opomíjené (nektarovkovité), kde např. *Odinia boletina* se vyskytuje ve velkém množství na plodnicích chorošovitě houby troudnatce troudového (*Fomes fomentarius*) v období jejich největšího růstu a nalétá na místa, kde z poraněné bukové kůry vytéká míza, takže není vyloučena její účast na přenášení nákazy této škodlivé dřevokazné houby. Jiné druhy žijí v chodbič-

kách dřevního hmyzu a pravděpodobně rovněž mají vztah k houbám tam rostoucím. Příspěvek J. Vaňhary jednal o mouchách lužního lesa, mnoho příspěvků se pak týkalo komárů, muchniček, ovádů a jiných much, jež ztěžují práci a ztrpčují život v lese, přenášejí rozmanité nákazy a ohrožují tak zdraví lidí i lesní zvěře. Z rozmanitých prostředků na obranu proti nim se ukázal účinný jalovcový olej, o jehož zkouškách referovali D. Novák a V. Potůček. Užitečných much v lesním hospodářství se týkaly referáty F. Stollára o pestřenkách v oblasti Slovenského ráje a K. Spitzra o současném stavu výzkumu much čeledi *Therevidae*. Průkopnické práce jsou o mapování rozšíření některých skupin dvoukřídlého hmyzu, např. ovádovitých (J. Ježek a V. Ježková) a bejlomorek (M. Skuhřavá). Po stránce metodické byly pozoruhodné příspěvky M. Skuhřavé a V. Skuhřavého o vztazích tří druhů bejlomorek k živné rostlině, kde šlo o objev nečekané interakce mezi motýlem, bejlo-morkami a houbou, dále o chovu vrtule třešňové v laboratorních podmínkách na uměle zhotovených napodobeninách třešní (V. Vallo).

I když problematika výzkumu v přednesených referátech byla velice pestrá, výsledky směřovaly nakonec převážně k ochraně lidského zdraví i celého životního prostředí. Příští dipterologický seminář bude koncem roku 1977 pravděpodobně uspořádán Čs. akademií věd v Liblicích u Mělníka.

Doc. Ing. Antonín Přihoda, Vědecký lesnický ústav VŠZ, Kostelec nad Černými lesy

**KOVALEVA S. R., KORSUNOV V. M., TARANOV S. A.: LESNÍ PŮDY
HORSKÉ OBLASTI JIHOVÝCHODNÍ ČÁSTI ZÁPADNÍ SIBÍŘE (LESNYJE
POČVY GORNOGO OKAMLENIIA JUGO-VOSTOKA ZAPADNOJ SIBIRI.
VOSTOČNYJ ALTAJ, GORNAJA ŠORIJA, SALAIR). 1974, NOVOSIBIRSK**

Lesní půdy horských oblastí západní Sibíře jsou celkem málo známe, publikace je proto cenným souborem prací z této oblasti. Má celkem 205 stran a obsahuje 3 monografické studie.

Prvá studie pojednává o půdách v areálu limbovo-modřínových lesů ve východní části Altaje. Krátký úvod obsahuje základní informační údaje o rozsáhlém pohoří Altaj, které se nalézá v jihozápadní části západní Sibíře. Další stať pojednává o podmínkách vzniku a průběhu půdotvorných procesů, kde jsou popsány a analyzovány jednotlivé půdotvorné faktory. Jsou zde obsaženy poměry geomorfologické, geologické a celkový charakter půdotvorných hornin s podrobnými analýzami chemickými, zrnitostními a fyzikálními zvětralin půdotvorných substrátů.

Následující stať obsahuje genetické zvláštnosti půd východního Altaje s přehledem genetické klasifikace lesních půd této zajímavé horské oblasti.

V další stati této monografie jsou popsány a podrobně charakterizovány půdy skupiny horských hnědých lesních půd „pseudopodzolovaných“, tvořících pásmo v nadmořských výškách 600–1200 m. Jsou tu podrobné popisy morfologie půdních profilů, jejich zrnitostní, agregátové a celkové chemické složení. Dále jsou tu analýzy jílové frakce, celkový obsah a frakční složení humusu, složení sorpčního komplexu a poměry tzv. volného železa Fe_2O_3 . Uváděné poměry morfologické a chemické ukazují na horské železité podzoly.

Následuje stať o typických horských hnědých lesních půdách, které tvoří samostatné výškové půdní pásmo v nadmořských výškách 1200–1800 m. Vlastnosti morfologické, fyzikální a chemické jsou podány obdobně jako v předešlé stati a připojeny jsou tu ještě chemické rozboru jehličí a travnaté vegetace a mikromorfologické snímky s vyhodnocením. Velmi dobré je celkové ekologické hodnocení těchto půd i z hlediska jejich produkční schopnosti.

Další stať tvoří charakteristiku a hodnocení horských hnědých lesních půd „lesivovaných“ a dále pak horských hnědých lesních půd podzolovaných, jež tvoří pásmo v nadmořských výškách v rozmezí 1800–2100 m. Celá tato dílčí monografie je zakončena závěrem, který obsahuje přehled a zhodnocení všech výsledků.

Následující dílčí monografie pojednává o ekologických a genetických zvláštnostech půd lesního pásma v oblasti horské Šoriji. V úvodě jsou základní informace o historii dosavadních výzkumů a následující stať popisuje „ekologické“ podmínky tvorby půd lesního pásma horské oblasti Šoriji. Jsou tu poměry geologické, tvorba a vývoj reliéfu terénu, půdotvorné substráty a klima. Zvlášť jsou tu vylišovány biogenní faktory důležité pro tvorbu půd (rostlinstvo a mikrobiocenózy). Dále je obsažena systematická klasifikace půd v této oblasti, která zahrnuje půdy horské tundrové, horské luční, půdy horských tajg s iluviálním humusovým horizontem (humus-železité podzoly?), hnědé půdy horské tajgy a podzoly. V oblasti tajgy jsou vylišovány ještě ostrovy drnových podzolů, vyluhovaných podzolovaných černozemí a drnových karbonátových půd (rendziny) a v některých dolinách se objevují ostrovy půd rašelinistních, rašelinopodzolových a glejových.

Veškeré tyto půdy jsou dobře charakterizovány morfologicky (některé i mikromorfologicky), fyzikálně, chemicky a biochemicky. Cenné jsou tu výsledky lyzimetrických studií o migraci půdních složek v podzolových půdách těchto horských lesních oblastí. Zakončující závěr je formulován dobře a obsahuje přehled veškerých dosažených výsledků v terénu i v laboratoři z této horské oblasti.

Třetí dílčí monografie podává poznatky o genetických zvláštnostech výrazných podzolů v lesní oblasti pohoří Salairy a speciálně o některých půdotvorných faktorech současného půdotvorného procesu. Po úvodní stati jsou tu popsány hlavní půdotvorné faktory, pak výčet nedogenetických zvláštností, pak podrobný popis a analýza studovaných půdních profilů po stránce zrnitostní, vodního režimu, chemismu a biochemických poměrů s hojnými číselnými tabulkami laboratorních analýz. Stať je provázena mikromorfologickou fotodokumentací a hojnými názornými grafy, jež znázorňují roční dynamiku určitých půdních vlastností.

Také závěr této třetí monografie je přehledný a velmi dobře sestaven. Připojený seznam literatury se týká problematiky všech 3 monografií.

Publikace představuje cenný příspěvek pro poznání lesních půd horských oblastí jak po stránce teoretické, tak z hle-

diska praktické aplikace se zvláštním zřetelem na obnovu lesa v horských oblastech. Možno ji proto doporučit zejmé-

na specialistům z oboru stanovištního výzkumu, pěstění lesů a hospodářské úpravy lesů.

Prof. Dr. Ing. Josef Pelíšek, DrSc., lesnická fakulta VŠZ, Brno

OBSAH

Mráz K.: Vodní režim jihomoravských lužních lesů před dokončením vodo- hospodářských úprav řeky Moravy	1
Urošević B.: Nádorová rakovina kořenů lesních dřevin	23
Fiala A.: Ergonomická studie výchovných zásahů ve smrkových a bukových mlazinách	33

Aktuality

Skoupý J.: Lesnické školství a výzkum v Norsku	47
Příhoda A.: Čtvrtý celostátní dipterologický seminář	50
Pelišek J.: Kovaleva S. R., Korsunov V. M., Taranov S. A.: Lesní půdy horské oblasti jihovýchodní části západní Sibiře. 1974, Novosibirsk	51

Příloha

Matematické metody v lesnictví	
Vřešťálová H.: Diferenciální počet funkcí jedné a více proměnných	1

СОДЕРЖАНИЕ

Мраз К.: Водный режим южноморавских пойменных лесов до завершения водо- хозяйственной регулировки реки Моравии	20
Урошевич Б.: Опухолевый рак корней лесных пород	29
Фиала А.: Эргономическое исследование рубок в еловом и буковом молодняке	43

Новости

Скоупы Й.: Лесное учебное дело и исследование в Норвегии	47
Пржигода А.: Четвертый государственный диpterологический семинар	50
Пелишек Й.: Ковалева С. Р., Корсунов В. М., Таранов С. А.: Лесные почвы горного окаймления юго-востока западной Сибири. 1974, Новосибирск	51

Приложение

Математические методы в лесном хозяйстве	
Врещалова Г.: Дифференциальное число функций одной и более пе- ременных	1

CONTENTS

Mráz K.: Water Regime of South-Moravian Lowland Forests Before the End of the Morava River Water — Management Adjustments	20
Urošević B.: Tumour Canker of Forest Species Roots	30
Fiala A.: The Ergonomic Study of Improvement Treatments in Spruce and Beech Young Stands	44

Topical News

Skoupý J.: Sylvicultural Education and Research in Norway	47
Příhoda A.: The Fourth National Dipterological Seminar	50
Pelišek J.: Kovaleva S. R., Korsunov V. M., Taranov S. A.: Forest Soils of the Montane Region of the Southeastern Part of Western Siberia. 1974, Novosibirsk	51

Supplement

Mathematical Methods in Forestry	
Vřešťálová H.: Differential Calculus of the Functions of One and More Variables	1

INHALT

Mráz K.: Der Wasserhaushalt süd-mährischer Auenwalder von der Beendigung der Flußregulation der Morava	21
Urošević B.: Geschwulstkrebse der Wurzeln bei Waldhölzern	31
Fiala A.: Ergonomische Studien der Pflegeeingriffe im Fichten- und Buchenjungwuchs	44

Aktualitäten

Skoupý J.: Forstliches Schulwesen und Forschung in Norwegen	47
Příhoda A.: Viertes ganzstaatliches dipterologisches Seminar	50
Pelíšek J.: Kovaleva S. R., Korsunov V. M., Taranov S. A.: Forstböden des Gebirgsgebietes im südöstlichen Teil von Westsibirien. 1974, Novosibirsk	51

Beilage

Mathematische Methoden in der Forstwirtschaft

Vřešťálová H.: Differenzialzahl der Funktionen bei einer und mehreren Veränderlichen	1
--	---

TABLE DES MATIÈRES

Mráz K.: Régime hydrique des forêts fluviales de Moravie méridionale avant l'achèvement des aménagements hydrauliques de la rivière Morava	21
Urošević B.: Chancre tumoral des racines des essences forestières	32
Fiala A.: Etude ergonomique des mesures d'éducation appliquées aux jeunes peuplements d'épicéa et de hêtre	45

Actualités

Skoupý J.: Enseignement et recherche forestiers en Norvège	47
Příhoda A.: Quatrième séminaire dipterologique national	50
Pelíšek J.: Kovaleva S. R., Korsunov V. M., Taranov S. A.: Sols forestiers dans la région de montagnes de la zone sud-est de la Sibirie occidentale. 1974, Novosibirsk	51

Annexe

Méthodes mathématiques en sylviculture

Vřešťálová H.: Nombre différentiel de fonctions à une ou à plusieurs variables	1
--	---

LESNICTVÍ č. 2/1977

otiskuje tyto práce:

- Korf V.: Významné výročí Střední lesnické technické školy v Hranicích
Penka M.: Studium fyziologie vývoje lesních dřevin
Langkramer O.: Biomasa půdních bakterií a mikromycet ve smrkových porostech a její podíl na vodní bilanci a koloběhu živin
Prudič Z.: Vliv buku na půdní podmínky horní vrstvy půdy smrko-bukového vegetačního stupně
Kudler J., Lysenko O.: Výsledky bakteriálních testů na píďalku tmavoskvvrnác (*Bupalus piniarius* L.)

Aktuality

- Vyskot M.: Přehled obhájených závěrečných zpráv československého lesnického výzkumu za 5. pětiletku
Ruprich J.: Program vědeckého výzkumu v lesním hospodářství v 6. pětiletce

Lesnictví č. 2/1977 stojí 12,— Kčs. Objednávky přijímá

Ústav vědeckotechnických informací pro zemědělství, Slezská 7, 120 56 Praha 2
Poštovní novinová služba, Jindřišská 14, 110 00 Praha 1

Rozšiřuje Poštovní novinová služba. Objednávky a předplatné přijímá PNS — ústřední expedice tisku, administrace odborného tisku, Jindřišská ulice 14, 110 00 Praha 1. Lze též objednat u každé pošty i poštovního doručovatele. Objednávky do zahraničí vyřizuje PNS — ústřední expedice tisku, oddělení vývozu tisku, Jindřišská ulice 14, 110 00 Praha 1. Vytiskl MÍR, novinářské závody, n. p., závod 6, Legerova ulice 22, 120 00 Praha 2.

MATEMATICKÉ METODY V LESNICTVÍ

H. Vřešťalová: Diferenciální počet funkcí jedné a více proměnných

PŘÍLOHA LESNICTVÍ 23 (L), 1977, Č. 1

Diferenciální a integrální počet tvoří úvodní kapitolu k rozsáhlé matematické teorii, tzv. matematické analýze, jejíž vznik náleží do doby asi před 300 lety. Podnětem k jejímu vzniku byla řada problémů z fyziky, astronomie, geometrie a mechaniky, optiky, vojenské nauky i mořeplavectví, architektury a jiných úkolů spojených s rozvojem techniky, kultury a civilizace. V dnešní době není možno se obejít v žádné technické vědě bez základů analýzy.

V krátkém přehledu Diferenciálního počtu se v první části budeme zabývat funkcí jedné proměnné, limitou a spojitostí, derivací a aplikacemi diferenciálního počtu jedné proměnné, zejména vyšetřením průběhu funkce, zjišťováním extrémů funkce, užitím diferenciálu v teorii chyb, Taylorovým (MacLaurinovým) rozvojem funkce. Ve druhé části se seznámíme s analogickou problematikou u funkcí více proměnných.

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

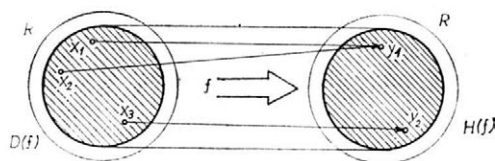
Definice 1. (Funkce.) Každé zobrazení v množině reálných čísel R nazveme reálnou funkcí jedné reálné proměnné.

Zápis funkce $f = \{[x, y] \in D(f) \times H(f) \wedge y = f(x)\}$ nebo

$$f = \{[x, y] \in D(f) \times H(f) \wedge y = f(x)\} \text{ nebo}$$

$$y = f(x); x \in D(f) \subset R, y \in H(f) \subset R.$$

Schématické znázornění je na obr. 1.



1.

Poznámka 1. Množinu $D(f)$ nazýváme definiční obor funkce, prvek $x \in D(f)$ je hodnota nezávisle proměnné (argumentu).

$$D(f) = \{x \in R; \exists! y \in R \text{ tak, že } [x, y] \in f\}, \exists! \text{ zn. „existuje právě jedno“}.$$

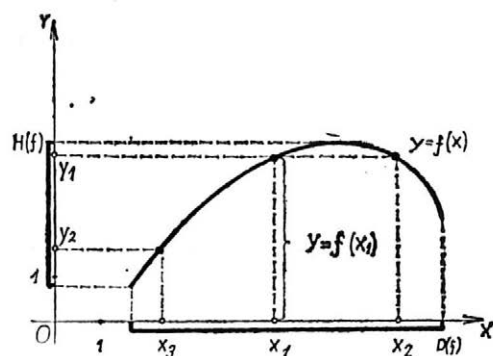
Množinu $H(f)$ nazýváme oborem funkčních hodnot, prvek $y \in H(f)$ je hodnota závisle proměnné (funkce).

$$H(f) = \{y \in R; \exists x \in R \text{ tak, že } [x, y] \in f\}.$$

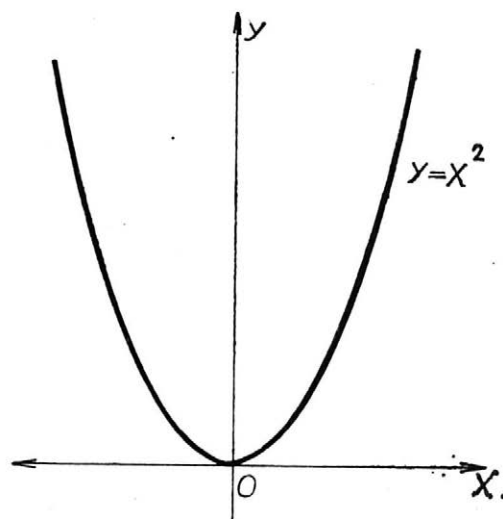
Jsou-li množiny $D(f)$ a $H(f)$ předem známy, zapisujeme často funkci pouze funkční rovnicí $y = f(x)$. Funkce může být zadána v různém tvaru, např.:

- explicitním tvarem funkční rovnice $f: y = f(x) \dots y$ je vypočteno,
- implicitním tvarem funkční rovnice $f: F(x, y) = 0 \dots y$ není vypočteno,
- tabulkou $f: \begin{array}{c|c|c|c|c} x & x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & \dots \end{array}$,
- grafem apod.

Definice 2. (Graf funkce.) Grafem funkce $y = f(x)$ rozumíme množinu $G = \{[x, y] \in R \times R; [x \in D(f)] \wedge [y \in H(f)]\}$. Znázorňujeme ho obvykle v kartézském souřadnicovém systému (obr. 2).



2.



3.

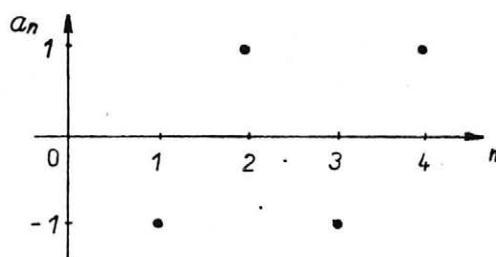
Příklad 1. Grafem funkce $y = x^2$ je parabola s vrcholem v počátku (obr. 3). Definiční obor $D(f) = (-\infty, \infty)$, $H(f) = \langle 0, \infty \rangle$.

Definice 3. (Posloupnost.) Je-li $D(f) \subset N$, funkci $f(n)$ nazýváme posloupností a zapisujeme $\{a_n\}$. Hodnoty a_n nazýváme členy posloupnosti, n je index n -tého členu.

Příklad 2. Grafem posloupnosti $(-1)^n$ jsou izolované body $[1, -1]$, $[2, 1]$, $[3, -1]$, $[4, 1]$, $\dots$, $[n, a_n]$; (obr. 4).

Definice 4. (Sudá a lichá funkce.) Funkci f nazveme

- sudou, jestliže $\forall x \in D(f) [f(-x) = f(x)]$,
- lichou, jestliže $\forall x \in D(f) [f(-x) = -f(x)]$.



4.

Poznámka 2. Graf sudé funkce je souměrný podle osy y (obr. 3), graf liché funkce je souměrný podle počátku (např. $y = \sin x$).

Příklad 3. Funkce $y = \frac{\sin x}{x}$ je sudá, neboť (podle definice 4)

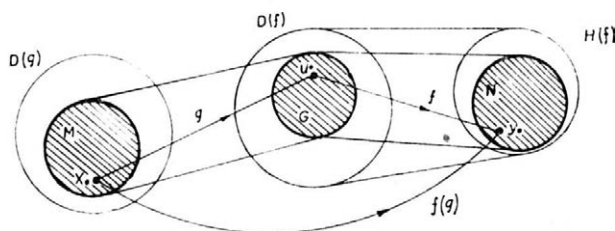
$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

Definice 5. (Periodická funkce.) Funkci f nazveme periodickou v $D(f)$, jestliže $\exists p > 0$, $p \in \mathbb{R}$, $\forall x \in D(f)$ [$f(x+p) = f(x)$]. Číslo p se nazývá perioda funkce f .

Příklad 4. Funkce $y = \sin x$ je periodická s periodou 2π ,

$y = \operatorname{tg} x$ je periodická s periodou π .

Definice 6. (Složená funkce.) Nechť je dána funkce $y = f(u)$, $u \in G \subset D(f)$ a funkce $u = g(x)$, $x \in M \subset D(g)$. Nechť pro každé $x \in M$ je $u \in G$. Pak každému $x \in M$ přísluší právě jedna hodnota $y \in N \subset H(f)$, kterou značíme $y = f[g(x)]$ a nazýváme složenou funkcí, kde g je vnitřní složkou a f je vnější složkou složené funkce (obr. 5).



5.

Příklad 5. Pro funkci $y = f(u) = u^2$ je $D(f) = (-\infty, \infty)$; pro funkci $u = g(x) = \sin x$ je $D(g) = (-\infty, \infty)$; $H(g) = \langle -1, 1 \rangle \subset D(f)$. Tedy složená funkce $y = f[g(x)] = \sin^2 x$ je definována na $(-\infty, \infty)$.

Definice 7. (Prostá funkce.) Funkci $f(x)$, $x \in M \subset D(f)$ nazveme prostou v M , když $\forall x_1, x_2 \in M$ [$(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$].

Definice 8. (Inverzní funkce.) Je-li funkce $y = f(x)$ prostá v $M \subset D(f)$ a zobrazuje-li M na $N \subset H(f)$, pak funkce, která přiřazuje každému $y \in N$ číslo $x \in M$, pro něž platí $y = f(x)$, nazýváme inverzní k funkci $f(x)$ a značíme ji f^{-1} .

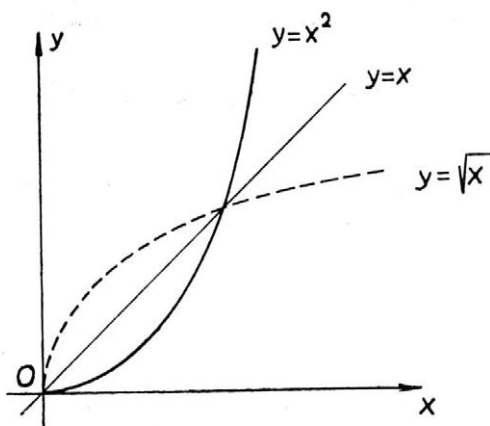
Poznámka 3. Pro definiční obor a množinu funkčních hodnot inverzní funkce f^{-1} platí: $D(f^{-1}) = H(f)$, $H(f^{-1}) = D(f)$. Graf inverzní funkce $y = f^{-1}(x)$ je souměrný ke grafu $y = f(x)$ podle přímky $y = x$.

Příklad 6. Necht' $y = x^2$, $x \in \langle 0, \infty \rangle$. Inverzní funkci f^{-1} k f vypočteme ze zadání, tj. $x = \sqrt{y}$;

$$D(f) = \langle 0, \infty \rangle, H(f) = \langle 0, \infty \rangle$$

$$H(f^{-1}) = \langle 0, \infty \rangle, D(f^{-1}) = \langle 0, \infty \rangle.$$

Grafy funkce $y = x^2$ a k ní inverzní funkce $y = \sqrt{x}$ jsou znázorněny na obr. 6.



6.

Příklad 7.

a) K funkci $y = \sin x$; $x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$, $y \in \langle -1, 1 \rangle$ je definována inverzní funkce $y = \arcsin x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$, $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

b) K funkci exponenciální $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, \infty)$ je definována inverzní funkce $y = \log_a x$; $x \in (0, \infty)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

Přehled elementárních funkcí, jejich definičních oborů $D(f)$, množin funkčních hodnot $H(f)$ a příklady složených funkcí je uveden v tabulce I.

LIMITA FUNKCE

Poznámka 4. (Okolí bodu.) Buď $x, a \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}^+$. Označme $O(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}; |x - a| < \delta\}$ δ -okolí bodu a , $U(a; \delta) = O(a; \delta) - \{a\} = \{x \in \mathbb{R}; 0 < |x - a| < \delta\}$ ryzí δ -okolí bodu a , $O^+(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < a + \delta\}$ pravé δ -okolí bodu a , $U^+(a; \delta) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < a + \delta\}$ pravé ryzí δ -okolí bodu a . Analogicky jsou definována levá okolí $O^-(a; \delta)$, $U^-(a; \delta)$.

Definice 9. (Cauchyho definice limity funkce.) Necht' funkce $f(x)$ je definována v nějakém ryzím okolí U bodu x_0 . Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu L právě tehdy, když ke

Tabulka I.

Název funkce	Jednoduchá	$D(f)$	$H(f)$		Příklad
konstantní	$y = c, c \in R$	R	c		$y = 9$
mocninná	$y = x^n$	R^{+1} $n \in R^2$	R^+	$y = [f(x)]^n$	$y = \sin^3 x$ $y = \sqrt{\log x}$
exponenciální	$y = a^x, a > 0$ $y = e^x$	R	R^+	$y = a^{f(x)}$ $y = e^{f(x)}$	$y = 3 \cos x, y = e^{x^2}$
logaritmická	$y = \log_a x, a > 0$ $a \neq 1$	R^+	R	$y = \log_a f(x)$	$y = \log_3 \lg x$
goniometrické	$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \operatorname{tg} x$ $y = \operatorname{cotg} x$	R R $R - \left\{ (2k+1) \frac{\pi}{2} \right\}$ $k \in Z$ $R - \{k\pi\}$ $k \in Z$	$\langle -1, 1 \rangle$ $\langle -1, 1 \rangle$ R R	$y = \sin f(x)$ $y = \cos f(x)$ $y = \operatorname{tg} f(x)$ $y = \operatorname{cotg} f(x)$	$y = \sin x^5$ $y = \cos \sqrt{1-x}$ $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ $y = \operatorname{cotg} (x^2 + 1)$
cyklometrické	$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \operatorname{arctg} x$ $y = \operatorname{arccotg} x$	$\langle -1, 1 \rangle$ $\langle -1, 1 \rangle$ R R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ $\langle 0, \pi \rangle$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ $(0, \pi)$	$y = \arcsin f(x)$ $y = \arccos f(x)$ $y = \operatorname{arctg} f(x)$ $y = \operatorname{arccotg} f(x)$	$y = \arcsin \frac{1}{x}$ $y = \arccos 4x$ $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}$ $y = \operatorname{arccotg} (-2x)$

¹⁾ $R^+ = \{x \in R; x > 0\}$ ²⁾ Pro některá n lze obor $D(f)$ i $H(f)$ rozšířit.

každému ε -okolí $O(L; \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ čísla L existuje δ -okolí $U(x_0; \delta) \subset U$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in U(x_0; \delta)$ je $f(x) \in O(L; \varepsilon)$ a značíme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

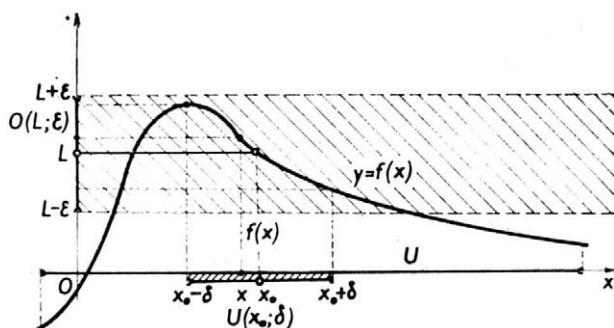
Poznámka 5. (Druhy limit.) Rozlišujeme případy, kdy

1. body x_0, L jsou vlastní (konečné) či nevlastní ($\pm \infty$),
2. okolí bodů x_0, L jsou oboustranná či jednostranná. (V bodech $\pm \infty$ jde vždy o jednostranná okolí.)

Podle limity L rozlišujeme

1. je-li L konečná, nazveme $\lim f(x)$ limitou vlastní,
2. je-li $L = +\infty$ nebo $-\infty$ (tj. L je nekonečně velké), nazveme $\lim f(x)$ limitou nevlastní.

Poznámka 6. (Geometrická interpretace limity funkce.) Geometricky existence $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ znamená, že pro $x \in U(x_0; \delta)$ leží graf $y = f(x)$ uvnitř pásu ohraničeného přímkami $y = L + \varepsilon$ a $y = L - \varepsilon$ (obr. 7).



7.

Jinak řečeno: ať si zvolíme pás ohraničený přímkami $y = L + \varepsilon$, $y = L - \varepsilon$ sebeužší (tj. ε sebemenší), vždy existuje δ -okolí bodu x_0 tak, že pro všechna x z tohoto okolí různá od x_0 platí $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Poznámka 7. Pro výpočty bývá užitečnější aritmetický zápis. Srovnajte s definicí 9. Vlastní limita ve vlastním bodě x_0 :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon] \quad (\text{obr. 7})$$

Vlastní limita zprava ve vlastním bodě x_0 : (značíme $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$)

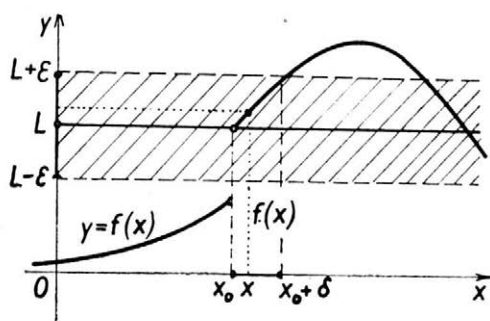
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U^+[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon] \quad (\text{obr. 8})$$

Vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$: (značíme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$)

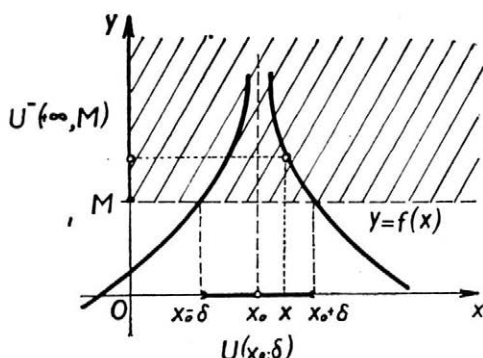
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists k \in \mathbb{R} \forall x \in U^+[x < k \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon]$$

Nevlastní limita ve vlastním bodě x_0 :

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in U[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M] \quad (\text{obr. 9})$$



8.



9.

Poznámka 8. a) Volba čísla $\delta > 0$ nebo k je závislá na volbě čísla $\varepsilon > 0$.

b) Z definice je patrné, že nás nezajímají funkční hodnoty v bodě x_0 ani v bodech, které nejsou z δ -okolí bodu x_0 .

c) Pořadí kvantifikátorů $\forall, \exists$ je podstatné a nelze je zaměňovat.

Věta 1. (Operace s limitami.) Necht' $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ jsou vlastní nebo nevlastní limity a obě existují. Pak platí:

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} k = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)|$$

$$4. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

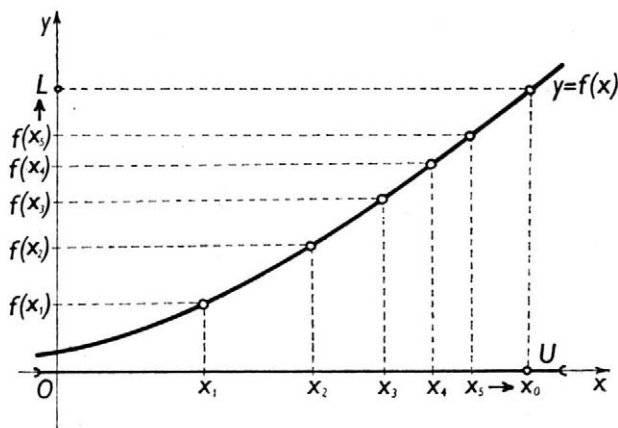
$$5. \lim_{x \rightarrow x_0} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad k \in \mathbb{R}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \text{je-li } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

$$7. \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^p = [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)]^p, \quad p \in \mathbb{R}$$

Poznámka 9. S Cauchyho definicí limity funkce je ekvivalentní definice Heineova, založená na limitě posloupnosti. Zopakujme: posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu a [čili $\{a_n\}$ konverguje k a], když $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} [n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$ a zapisujeme $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ nebo $a_n \rightarrow a$ pro $n \rightarrow \infty$.

Definice 10. (Heineova definice limity funkce.) Necht' $f(x)$ je definována v jistém okolí U bodu x_0 . Funkce $f(x)$ má v x_0 limitu L , když pro každou posloupnost $\{x_n\}$, kde $x_n \in U$ pro všechna n platí $(x_n \rightarrow x_0 \wedge x_n \neq x_0) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow L$ (obr. 10).



10.

V následujících příkladech si ukážeme nejčastější postupy při výpočtu limity funkcí.

Příklad 8. a) Dosazením x_0 u spojitých funkcí: $\lim_{x \rightarrow 2} (3^x + 1)^2 = 100$.

b) Rozkladem mnohočlenů:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2 (x+2)}{(x-1)^2 (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

c) Rozšiřováním zlomků a užitím vztahů $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$, apod. ...:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x^2 - 4x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x^2 - 4x - 5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x+1)(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

d) Užitím limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, a goniometrických vzorců, nejčastěji $\sin \frac{a}{2} =$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}, \quad \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}:$$

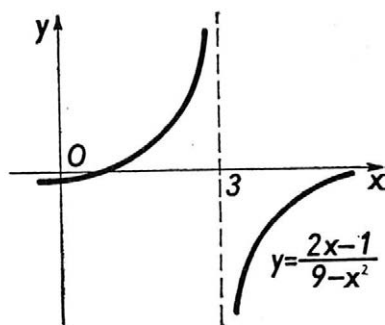
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{1 - \cos 4x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{2} \cdot \sin 2x} = \left\| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad 2x = t \left\| = \right. \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

e) Jednostranné limity $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ pro $x \rightarrow x_0^+$ [$x \rightarrow x_0^-$] řešíme substitucí $x = x_0 + \delta$ [$x = x_0 - \delta$] a výpočtem $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(x_0 + \delta)$ [$\lim_{\delta \rightarrow 0} f(x_0 - \delta)$]:

$$\lim_{x \rightarrow 3+} \frac{2x+1}{9-x^2} = \left\| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ x \rightarrow 3+ \Rightarrow \delta \rightarrow 0 \end{array} \right\| x = 3 + \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{2(3+\delta)-1}{9-(3+\delta)^2} =$$

$$= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{5+2\delta}{-(6\delta+\delta^2)} = -\infty.$$

Analogicky $\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{2x+1}{9-x^2} = +\infty$. (obr. 11).



11.

f) Typ $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ vydělíme čitatele i jmenovatele mocninou x^k , kde $k = \max(n, m)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$

g) Užitím základních limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ apod.:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+4}\right)^x = \left\| \begin{array}{l} \text{subst.} \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty \end{array} \right\| x+4=u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u-4} =$$

$$= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-4} = e \cdot 1^{-4} = e.$$

SPOJITOST FUNKCE

Definice 11. (Spojitost funkce.) Funkce $f(x)$ je spojitá v době x_0 , jestliže

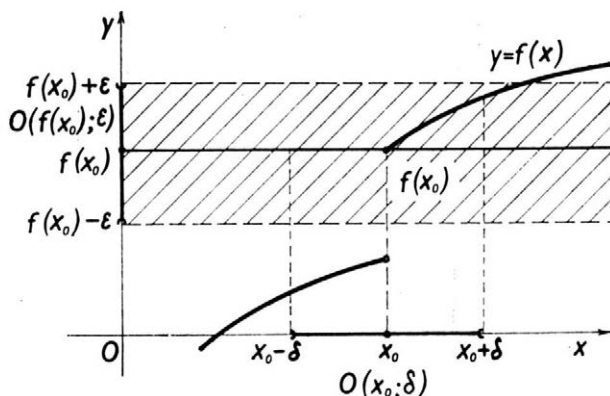
a) je v bodě x_0 definována, tj. symbol $f(x_0)$ má smysl,

b) limita $f(x)$ v bodě x_0 je rovna funkční hodnotě, tj. platí $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, tzn.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \forall x \in \mathbb{R} [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě x_0 zprava [zleva], jestliže je v bodě x_0 definována a $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ pro $x \rightarrow x_0^+$ [$x \rightarrow x_0^-$].

Poznámka 10. Spojitost funkce bývá spojována s představou „souvislého grafu“, který lze nakreslit „jedním tahem“, bez přerušení, skoku. Funkce, která není spojitá, se nazývá nespojitá. Na obr. 12 je znázorněna funkce $f(x)$ nespojitá v bodě x_0 , neboť neexistuje ke zvolenému ε okolí $O(x_0, \delta)$ tak, aby všechny funkční hodnoty $f(x)$ pro $x \in O(x_0, \delta)$ „ležely“ v pásu o šířce 2ε . Daná funkce je však spojitá zprava v bodě x_0 .



12.

Příklad 9. Základní elementární funkce mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické apod. jsou spojitě funkce ve všech $x \in D(f)$.

Příklad 10. Dirichletova funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = \text{racionální číslo} \\ 0 & \text{pro } x = \text{iracionální číslo} \end{cases}$, definovaná na intervalu $(0, 1)$, je nespojitá v každém bodě svého definičního intervalu, neboť v každém okolí x_0 (např. racionálního čísla, $f(x_0) = 1$) existuje nekonečně mnoho čísel iracionálních, pro něž $f(x) = 0$ a platí $|f(x) - f(x_0)| = 1$. Tedy k libovolnému $\varepsilon < 1$ nelze najít okolí $O(x_0, \delta)$, aby pro všechna $x \in O(x_0, \delta)$ platilo, že $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Poznámka 11. Funkce $f(x)$ může být nespojitá z těchto příčin: a) neexistuje limita $f(x)$ v bodě x_0 , b) funkce $f(x)$ není v bodě x_0 definovaná, c) neplatí rovnost $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, přestože obě strany rovnice jsou definovány.

DERIVACE FUNKCE

Pojem derivace byl vytvořen během 2. pol. 17. stol. při řešení konkrétních fyzikálních a geometrických úloh. Hlavní význam diferenciálního počtu záleží v tom, že zatímco všechny předešlé početní metody dovedly matematicky vyjádřit jen neproměnné stavy přírody kolem nás, sleduje přírodu dialekticky, tj. v jejím pohybu, při spojitých změnách, jimž podléhají téměř všechny děje reálného světa.

Definice 12. (Derivace funkce v bodě.)

a) Nechť funkce $f(x)$ je definována na nějakém okolí $O(x_0)$ bodu x_0 .

Vlastní limitu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

nazveme derivací funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme $f'(x_0)$.

b) Necht' funkce $f(x)$ je definována v pravém okolí $O^+(x_0)$ bodu x_0 [v levém okolí $O^-(x_0)$].
Limitu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left[\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] \quad (2)$$

nazveme derivací zprava [zleva] funkce $f(x)$ v bodě x_0 a značíme $f'^+(x_0)$ [$f'^-(x_0)$].

c) Jsou-li limity (1), popř. (2) nevlastní, hovoříme o nevlastní derivaci, popř. o nevlastní derivaci zprava nebo zleva.

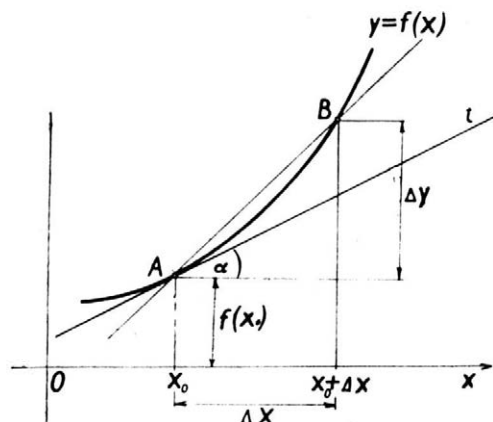
Poznámka 12. Výraz $\Delta x = x - x_0$ nazýváme přírůstek (diference) nezávisle proměnné (argumentu), $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ je přírůstek závisle proměnné (funkce).
Derivaci $f'(x_0)$ obvykle zapisujeme:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy}{dx} \Big|_{x_0} = \\ &= \frac{d}{dx} f(x_0) = y'(x_0), \text{ kde } h = x - x_0. \end{aligned}$$

Výrazy $dx[dy]$ nazýváme diferenciály proměnných $x[y]$.

Geometrický význam derivace.

Výraz $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ je směrnice sečny AB grafu funkce $y = f(x)$. Jestliže $x \rightarrow x_0$, přechází sečna v tečnu grafu v bodě $A[x_0, f(x_0)]$; je tedy $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ směrnici tečny v bodě x_0 (obr. 13).

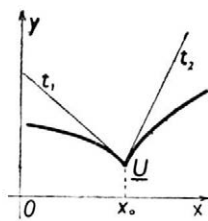


13.

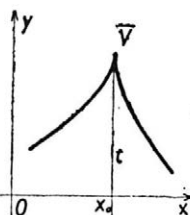
Definice 13. (Derivace na množině.) Má-li $f(x)$ vlastní derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$, říkáme že má v (a, b) derivaci. Značíme $f'(x)$, $y'(x)$, dy/dx apod.
Má-li $f(x)$ derivaci v (a, b) a v bodě a derivaci zprava, v b derivaci zleva, říkáme, že $f(x)$ má derivaci v $\langle a, b \rangle$.

Věta 2. Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$ tehdy a jen tehdy, platí-li v tomto bodě $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

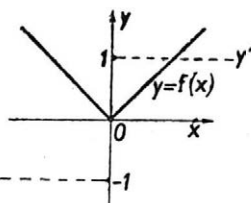
Poznámka 13. a) Existuje-li $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$ má funkce $f(x)$ v tzv. úhlovém bodě $U[x_0, f(x_0)]$ polotečnu zprava a polotečnu zleva (obr. 14). b) Má-li spojitá funkce $f(x)$ v bodě x_0 nevlastní derivace zleva a zprava opačných znamení, nazveme bod $V[x_0, f(x_0)]$ bodem vratu (obr. 15); polotečna je rovnoběžná s osou y .



15.



14.



16.

Věta 3. (Derivace a spojitost.) Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci, pak je v bodě x_0 spojitá.

Poznámka 14. Obrácená věta k větě 3. neplatí, jak je vidět např. na funkci $y = |x|$, která je v $x = 0$ spojitá, ale $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, tedy $f'(0)$ neexistuje (podle věty 2 — obr. 16).

Příklad 11. Vypočítejte derivaci funkce $y = x^3$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$1. \Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3.$$

$$2. \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$3. (x_0^3)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2) = 3x_0^2.$$

Derivace důležitých elementárních funkcí je uvedena v tabulce II.

Věta 4. (Derivace součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí, derivace složené a inverzní funkce.)

Nechť funkce $f(x)$, $g(x)$ a $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ mají derivace $f'(x)$, $g'(x)$, $f_i'(x)$ a necht $k, k_i \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$1. [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$2. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$3. [k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x)$$

Tabulka II

	Funkce	Derivace	Obor
1.	$y = c$	$y' = 0$	$c = \text{konstanta} \in R$
2.	$y = x^n$	$y' = n \cdot x^{n-1}$	$n \in R, x > 0^1)$
3.	$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$	$a \in R, a > 0, x \in R$
4.	$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in R$
5.	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$	$x > 0, a > 0 \wedge a \neq 1$
6.	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x > 0$
7.	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in R$
8.	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in R$
9.	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in R \wedge x \neq (2k+1) \frac{\pi}{2}, k \text{ celé}$
10.	$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in R \wedge x \neq k\pi, k \text{ celé}$
11.	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
12.	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1; 1)$
13.	$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$
14.	$y = \operatorname{arccotg} x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$x \in R$

¹⁾ Pro některá n lze obor platnosti pro proměnnou x rozšířit.

$$4. \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \text{ pro } g(x) \neq 0$$

$$5. [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \dots + k_n f_n(x)]' = k_1 f_1'(x) + k_2 f_2'(x) + \dots + k_n f_n'(x)$$

$$6. [f_1 \cdot f_2 \dots f_n]' = f_1' f_2 \dots f_n + f_1 f_2' \dots f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \dots f_n' \text{ v bodě } x.$$

7. Za předpokladu, že všechny potřebné derivace existují, platí pro derivaci složené funkce $f\{g[h(x)]\}$ vzorec

$$(f\{g[h(x)]\})' = f'_g\{g[h(x)]\} \cdot g'_h[h(x)] \cdot h'_x(x),$$

kde f'_g je derivace složky f podle složky g jako nezávisle proměnné,

g'_h je derivace složky g podle složky h jako nezávisle proměnné,

h'_x je derivace složky h podle nezávisle proměnné x .

8. Jsou-li $y = f(x)$, $x = g(y)$ funkce vzájemně inverzní, pak platí $f'(x) \cdot g'(y) = 1$, existují-li obě derivace; $f'(x)$ značí derivaci $f(x)$ podle x , $g'(y)$ derivaci $g(y)$ podle y .

9. Výrazy typu $f(x)^{g(x)}$ se derivují

a) převodem na složenou funkci exponenciální, tj.

$$\begin{aligned} [f(x)^{g(x)}]' &= [e^{g(x) \ln f(x)}]' = e^{g(x) \ln f(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right] = \\ &= f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right], \text{ je-li } f(x) > 0. \end{aligned}$$

b) tzv. logaritmickým derivováním podle schématu:

$$y = f(x)^{g(x)}, \ln y = g(x) \cdot \ln f(x), \text{ (derivováním plyne)}$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)},$$

$$y' = y \cdot \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right], \text{ je-li } f(x) > 0.$$

Tato pravidla usnadňují výpočet derivací, neboť určení derivace z definice bývá zdlouhavé. Logaritmické derivace se užívá zejména při derivování součinu, podílu, mocnin, funkcí

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Příklad 12. Určete derivace funkcí

Řešení

$$\text{a) } y = -5x^{-5} + 8x^2$$

$$y' = 25x^{-6} + 16x$$

$$\text{b) } y = \cos x + \frac{x}{2} + \frac{3}{x}$$

$$y' = -\sin x + \frac{1}{2} - \frac{3}{x^2}$$

$$\text{c) } y = \sqrt{x} \cdot \sin x$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$$

$$\text{d) } y = 3^x - \sqrt[3]{5} \cdot e^x + 8$$

$$y' = 3^x \cdot \ln 3 - \sqrt[3]{5} \cdot e^x$$

$$\text{e) } y = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

$$y' = \frac{\cos x(\cos x + 1) - \sin x(-\sin x)}{(\cos x + 1)^2} = \frac{1}{\cos x + 1}$$

Příklad 13. Derivace složené funkce $y = \sqrt[4]{2x-1}$, $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ je

$$y' = \left[(2x-1)^{\frac{1}{4}}\right]' = \frac{1}{4} \cdot (2x-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}}.$$

Příklad 14. Derivujte složené funkce

$$\text{a) } y = \sin^3 x; \text{ b) } y = \sin x^3; \text{ c) } y = 2 \sin^3 4x^5.$$

Řešení: a) $y' = 3 \sin^2 x \cdot \cos x$

b) $y' = \cos x^3 \cdot 3x^2$

c) $y' = 2 \cdot 3 \sin^2 4x^5 \cdot \cos 4x^5 \cdot 4 \cdot 5x^4 = 120x^4 \sin^2 4x^5 \cdot \cos 4x^5$

Příklad 15. Určete derivaci cyklometrické funkce $y = \arcsin x$.

Řešení: Funkce $y = \arcsin x$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$ je inverzní k funkci $x = \sin y$,

$y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Podle věty 4 dle 8 platí

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Tedy $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x \in (-1, 1)$

Příklad 16. Derivaci funkce $y = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x \sqrt{a^2 - x^2}$, $a \neq 0$, $|x| < |a|$ plyne

$$\begin{aligned} y' &= \frac{a^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a} + 1 \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2} (a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Příklad 17. Derivujeme $y = x^{e^x}$. Užijme logaritmickou derivaci:

a) $\ln y = e^x \cdot \ln x$

b) $\frac{1}{y} \cdot y' = e^x \cdot \ln x + e^x \cdot \frac{1}{x}$

c) $y' = y \cdot e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right) = x^{e^x} \cdot e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$

Definice 14. (Vyšší derivace.) Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0},$$

říkáme, že $f(x)$ má v x_0 druhou derivaci $f''(x_0) = (f'(x_0))'$.

Obdobně se definují derivace vyšších řádů $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots$

Obecně platí rekurentní vzorec $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$.

Příklad 18. Vypočtěte y''' funkce $y = x^5 + 2\cos x + e^{-x}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

$$y' = 5x^4 - 2\sin x - e^{-x}$$

$$y'' = 20x^3 - 2\cos x + e^{-x}$$

$$y''' = 60x^2 + 2\sin x - e^{-x}$$

Věta 5. (Leibnitzův vzorec): Mají-li $u(x)$, $v(x)$ derivace n -tého řádu, platí pro n -tou derivaci jejich součinu vzorec

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} \cdot v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots + u \cdot v^{(n)}$$

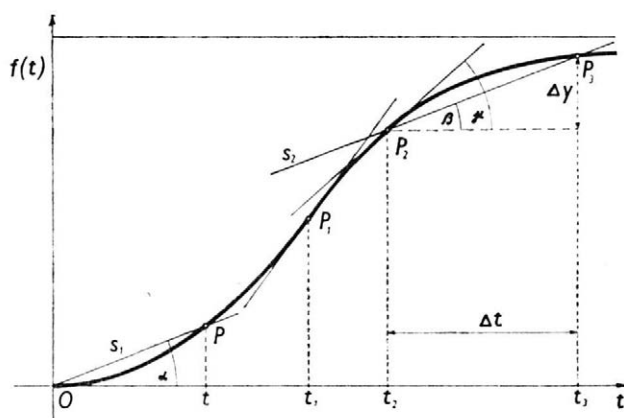
Poznámka 15. (Fyzikální význam derivace.) Jestliže průběh fyzikální veličiny je vyjádřen jako funkce $f(t)$ času t , pak rychlost změny této veličiny v čase t je dána vztahem $v = df/dt$. Takto vyjádřit lze např. rychlost nerovnoměrného přímočarého pohybu, elektrický proud, rychlost růstu, rychlost chemické reakce aj.

Příklad 19. Je-li $s = s(t)$ zákon dráhy nějakého pohybu (t je čas, s dráha), podíl $[s(t) - s(t_0)]/(t - t_0)$ se nazývá průměrná rychlost v časovém úseku $t - t_0$. Při nerovnoměrném pohybu se zavádí pojem okamžité rychlosti jako $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ pro $t \rightarrow t_0$. Tedy okamžitá rychlost pohybu v čase t_0 je derivace dráhy s podle času t , tj. $v(t_0) = s'(t_0)$ neboli $v(t_0) = \frac{ds(t_0)}{dt_0}$.

Analogicky okamžitě zrychlení daného pohybu v čase t_0 je derivace rychlosti v podle času t , tj.

$$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0), \text{ neboli } a(t_0) = \frac{dv(t_0)}{dt} = \frac{d^2s(t_0)}{dt^2}.$$

Příklad 20. V dendrometrii se např. veličiny výška stromu, tloušťka kmene, hmota stromu nazývají taxačními veličinami. Každou taxační veličinu y , která se mění věkem (a to většinou roste), můžeme pokládat za funkci věku t , tj. $y = f(t)$. O funkci učiníme předpoklad, že je nejen spojitá, ale že má i derivace vyšších řádů, jejichž význam v lesnictví si v této části naznačíme. Graf funkce $y = f(t)$ se obvykle nazývá růstovou křivkou, která má určité charakteristické vlastnosti. V počátečním stadiu je konvexní, v jistém časovém okamžiku t_1 přechází do tvaru konkávního, přičemž se blíží s rostoucím časem určité přímce rovnoběžné s osou x . Obvykle má růstová křivka tvar protáhlého S (obr. 17).



17.

Průměrným přírůstem taxační veličiny od začátku až do věku t se nazývá poměr $p_1 = f(t)/t$ a geometricky značí směrnici sečny s_1 , procházející počátkem a bodem $P = [t, f(t)]$, tj. $\operatorname{tg} \alpha = f(t)/t$. Průměrným periodním přírůstem p_2 taxační veličiny v čase

$t_2 - t_3$ se nazývá poměr přírůstu taxační veličiny v intervalu $\langle t_2; t_3 \rangle$ $\Delta y = f(t_3) - f(t_2)$ k přírůstu času $\Delta t = t_3 - t_2$, tj.

$$p_2 = \frac{f(t_3) - f(t_2)}{t_3 - t_2} = \frac{f(t_2 + \Delta t) - f(t_2)}{\Delta t}. \quad (3)$$

Geometricky značí směrnici sečny s_2 , procházející body $P_2 [t_2, f(t_2)]$, $P_3 [t_3, f(t_3)]$, tj.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(t_2 + \Delta t) - f(t_2)}{\Delta t}.$$

Limita výrazu (3) pro $\Delta t \rightarrow 0$ je derivace funkce $y = f(t)$, tj.

$$p_3 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_2 + \Delta t) - f(t_2)}{\Delta t} = f'(t_2) \quad (4)$$

a značí okamžitý přírůst p_3 taxační veličiny v časovém okamžiku t_2 . Lesnická praxe však derivaci (4) nazývá běžným přírůstem. Dokonce nazývá běžným přírůstem poměr (3) pro $\Delta t \leq 10$ roků, neboť při růstu taxační veličiny se považuje časový úsek menší než 10 roků za velmi malý. Geometricky značí běžný přírůst v čase t_2 směrnici tečny vedené v bodě $P_2 [t_2, f(t_2)]$ k růstové křivce, tj. $\operatorname{tg} \gamma = f'(t_2)$, obr. 17.

DIFERENCIÁL A JEHO UŽITÍ V TEORII CHYB

Zkoumání problému, zda lze nahradit přírůstek funkce $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ nějakou lineární funkcí přírůstu nezávisle proměnné x , tj. funkcí tvaru $A \cdot \Delta x$ (tak, aby pro malé hodnoty Δx byla chyba vzniklá touto aproximací zanedbatelná ve srovnání s Δx), vede k zavedení pojmu diferenciálu.

Definice 15. (Diferenciál funkce.) Nechť $f(x)$ je funkce definovaná v okolí $O(x_0)$. Existuje-li k $f(x)$ v bodě x_0 funkce $A \cdot \Delta x$, která splňuje podmínku $\Delta y = A \cdot \Delta x + \tau(\Delta x) \Delta x$ a $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tau(\Delta x) = 0$, říkáme, že funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 diferenciál $A \cdot \Delta x$ a píšeme $dy = A \cdot \Delta x$ nebo $df(x) = A \cdot \Delta x$.

Věta 6. (Diferenciál a derivace funkce.) Funkce $f(x)$ má v bodě x_0 diferenciál právě, když má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Pak platí $A = f'(x_0)$.

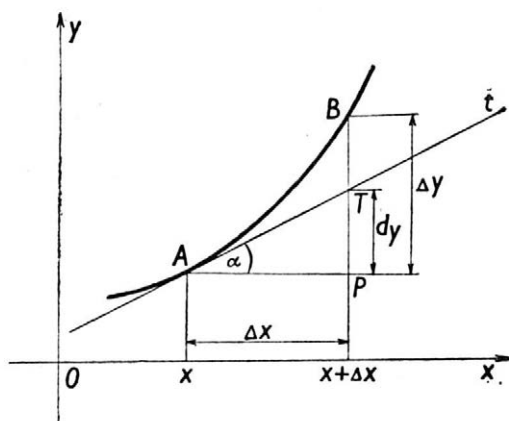
Poznámka 16. Pro funkci $y = f(x) = x$ je $A = f'(x) = 1$, tj. $dy = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x = dx$. Symbol dx nazýváme diferenciálem nezávisle proměnné. Diferenciál dy funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 budeme tedy zapisovat ve tvaru

$$dy = f'(x_0) dx. \quad (5)$$

Poznámka 17. (Geometrický význam.) Znak Δx , dx vyjadřují tutéž změnu nezávisle proměnné x , kdežto přírůstek Δy funkce $f(x)$

$$\Delta y \equiv \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (6)$$

a její diferenciál $dy \equiv df(x) = f'(x)dx$ v témže bodě se obecně liší. Výraz Δy vyjadřuje přírůstek pořadnice funkce, zatímco diferenciál dy vyjadřuje přírůstek pořadnice tečny sestrojené v bodě A pro přírůstek argumentu Δx (obr. 18).



18.

Pro dostatečně malá dx je dy aproximací přírůstku Δy , tj.

$$\Delta y \doteq dy. \quad (7)$$

Nahrazujeme-li přírůstek funkce v bodě x_0 diferenciálem, znamená to geometricky, že v malém okolí $O(x_0)$ nahrazujeme graf funkce její tečnou v bodě A .

Přesnější určení přírůstku funkce, než je aproximace diferenciálem, dává Taylorův vzorec.

Příklad 21. Vypočítejte přibližně $\sqrt[3]{16,06}$.

Zaveďme funkci $y = \sqrt[3]{x}$, položíme $x_0 = 16$, $\Delta x = 0,06$.

Dle (5), (6), (7) píšme

$$f(x_0 + \Delta x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad (8)$$

Derivace $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a $f'(16) = \frac{1}{8}$. Tedy $\sqrt[3]{16,06} = f(16 + 0,06) = f(16) + f'(16) \cdot 0,06 = 4 + 0,0075 = 4,0075$.

Příklad 22. Vypočítejte přibližně $\sin 46^\circ$.

Užitím vztahu (8) plyne

$$\sin(x_0 + \Delta x) \doteq \sin x_0 + \cos x_0 \cdot \Delta x.$$

Položíme

$$x_0 = \pi/4, \Delta x = \pi/180.$$

Pak

$$\begin{aligned} \sin 46^\circ &= \sin(\pi/4 + \pi/180) \doteq \sin \pi/4 + \cos \pi/4 \cdot \pi/180 = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} = 0,7071 (1 + 0,017) = 0,7194. \end{aligned}$$

$$\sin 46^\circ \doteq 0,7194.$$

Poznámka 18. Pojmu diferenciálu užíváme v praxi např. k odhadu chyby, které se dopustíme při výpočtu hodnoty funkce $y = f(x)$, užijeme-li hodnoty argumentu x s chybou Δx . Chyba, které se dopustíme, je dána výrazem $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Výraz $|\Delta y| \doteq |dy|$ je absolutní chyba výpočtu, zatímco relativní chyba výpočtu je $|\Delta y/y| \doteq |dy/y|$ pro $y \neq 0$. Relativní chyba se často udává v %.

Příklad 19. Určete velikost poměru relativní chyby plochy kruhu a relativní chyby jeho průměru.

Označme $y(x) = \pi \frac{x^2}{4}$ funkci, určující plochu y v závislosti na průměru x . Relativní chyba $\left| \frac{\Delta y}{y} \right| = \left| \frac{(\pi/2)x \cdot \Delta x}{\pi x^2/4} \right| = 2 \cdot \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$.

Relativní chyba obsahu kruhu je tedy dvakrát větší než relativní chyba průměru.

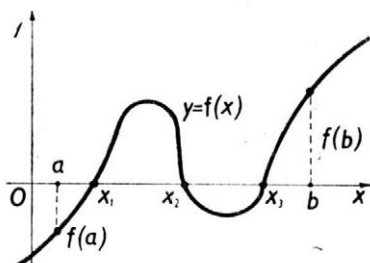
VLASTNOSTI SPOJITÝCH FUNKCÍ NA UZAVŘENÉM INTERVALU

Věta 7. Je-li $f(x)$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je v něm ohraničená, tj. existuje takové číslo $M > 0$, že platí $|f(x)| \leq M$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$.

Věta 8. (Weierstrassova věta.) Každá funkce spojitá v $\langle a, b \rangle$ nabývá v tomto intervalu svého maxima a svého minima (své největší a své nejmenší hodnoty).

Věta 9. (Bolzano-Weierstrassova mezihodnotová věta.) Funkce $f(x)$ spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ nabývá v něm všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Důsledek 1. Je-li kromě toho $f(a) \cdot f(b) < 0$, existuje uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$ aspoň jedno takové číslo x_1 , že $f(x_1) = 0$ (obr. 19).



19.

Geometrický význam: Mají-li funkční hodnoty $f(a), f(b)$ funkce spojitě v $\langle a, b \rangle$ opačná znamení, protne graf této funkce aspoň jednou osu x uvnitř $\langle a, b \rangle$ (obr. 19).

Příklad 19. Pomocí důsledku 1 můžeme přibližně nalézt reálná řešení (algebraických) rovnic. Mějme rovnici $x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 2 = 0$. Označme $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + x + 2$. Funkce $f(x)$ je spojitá v $(-\infty, \infty)$. $f(2) = -8 < 0$ a $f(3) = 32 > 0$, tedy podle důsledku 1 má rovnice v intervalu $\langle 2, 3 \rangle$ aspoň jeden kořen. Předpokládejme, že

v tomto intervalu leží právě jeden kořen. Zvolíme-li např. $x = 2,5$, je $f(2,5) > 0$ a tedy podle téhož důsledku leží kořen v $\langle 2; 2,5 \rangle$. Dalším dělením tohoto intervalu získáme přesnější hodnotu kořene.

Věta 10. (Rollova věta.) Necht funkce $f(x)$ 1. je spojitá v $\langle a, b \rangle$, 2. má derivaci v (a, b) , 3. $f(a) = f(b)$. Pak existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$, že $f'(c) = 0$.

Geometrický význam: Graf funkce $y = f(x)$ má za uvedených předpokladů aspoň v jednom bodě intervalu (a, b) tečnu rovnoběžnou s osou x .

Poznámka 19. Z Rollovy věty vyplývá, že mezi každými dvěma kořeny diferencovatelné funkce $f(x)$ leží aspoň jeden kořen její derivace $f'(x)$.

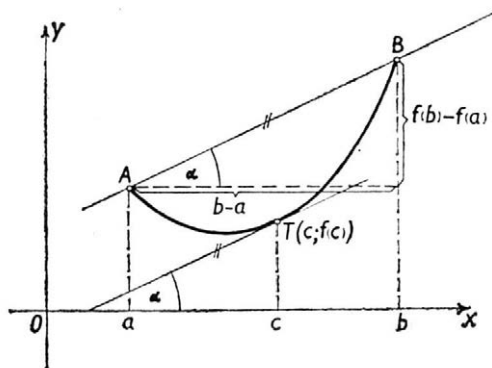
Této poznámky se výhodně používá při stanovení počtu reálných kořenů polynomu.

Příklad 20. Ukažte, že rovnice $x^3 + 4x - 10 = 0$ má právě jeden reálný kořen. Označme $f(x) = x^3 + 4x - 10$. $f(x)$ je spojitá a diferencovatelná na $(-\infty, \infty)$. $f'(x) = 3x^2 + 4 > 0$; tedy neexistuje reálný kořen $f'(x)$. Pak $f(x)$ má nejvýše jeden reálný kořen. Protože $f(x)$ je polynom lichého stupně, má daná rovnice právě jeden reálný kořen.

Věta 11. (Langrangeova věta o střední hodnotě.) Necht funkce $f(x)$ 1. je spojitá v $\langle a, b \rangle$, 2. má derivaci $f'(x)$ na (a, b) . Pak existuje aspoň jeden bod $c \in (a, b)$ takový, že platí $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Geometrický význam. Na grafu funkce $y = f(x)$ existuje aspoň jeden bod $T[c, f(c)]$, $c \in (a, b)$, v němž je tečna grafu $f(x)$ rovnoběžná se secnou AB o směrnici

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (\text{obr. 20}).$$



20.

Poznámka 20. Lagrangeova věta se nazývá též větou o přírůstku funkce. Umožňuje odhadnout velikost přírůstku funkce $f(b) - f(a)$, dovedeme-li odhadnout derivaci $f'(x)$ v (a, b) .

Příklad 21. Odhadněte přírůstek funkce $y = \operatorname{arctg} x$, jestliže x se změní z hodnoty $x = 2$ na $x = 3$. Odhadneme derivaci $y' = \frac{1}{1+x^2}$ v intervalu $(2, 3)$. Platí $\frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{5}$ pro $c \in (2, 3)$. Pak $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 = 1 \cdot \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{5}$.

Problém, kdy a jakým způsobem lze danou funkci $f(x)$ aproximovat (tj. nahradit s dostatečnou přesností) v okolí daného bodu x_0 nejjednodušší funkcí — polynomem — řeší Taylorova věta.

Věta 12. (Taylorova věta.) Nechť funkce $f(x)$ má v okolí $O(x_0)$ spojitou $(n+1)$ -ní derivaci. Pak pro každé $x \in O(x_0)$ platí Taylorův vzorec

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x) = T_n(f, x_0, x) + R_{n+1}(x) \quad (9)$$

kde

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}, \vartheta \in (0, 1), n \in \mathbb{N}.$$

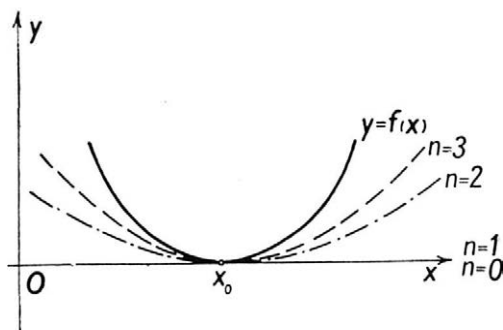
Polynom T_n nazýváme Taylorovým polynomem funkce $f(x)$ v bodě x_0 , R_{n+1} je Taylorův zbytek.

Poznámka 21. Klademe-li v Taylorově vzorci (9) $x_0 = 0$, dostaneme tzv. Maclaurinův vzorec:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x) \quad (10)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \vartheta \in (0, 1).$$

Význam Taylorovy věty. Taylorovým polynomem lze v okolí bodu x_0 nahradit funkci $f(x)$ s nepřesností danou velikostí zbytku $R_{n+1}(x)$. Čím vyšší je stupeň Taylorova polynomu, tím lépe tento aproximační polynom nahrazuje $f(x)$ v $O(x_0)$, tím těsněji se přimyká graf $T_n(x)$ ke grafu funkce $f(x)$ (obr. 21). Taylorův polynom n -tého stupně má v x_0 s funkcí $f(x)$ nejen společnou funkční hodnotu, ale i hodnotu prvních n derivací.



21.

Příklad 22. Nahradme funkci $y = \sin x$ v okolí $x_0 = 0$ polynomem 4. stupně, odhadneme chybu a vypočteme $\sin 3^\circ$.

Užijeme vzorce (10).

$$f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, \dots, f^{(5)}(x) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos x; f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, f^{(4)}(0) = 0,$$

tedy

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5. \quad (11)$$

Dle (10) je

$$R_5 = \frac{\cos \vartheta x}{5!} x^5, \vartheta \in (0, 1)$$

Odhad chyby je $|R_5| \leq \frac{|x|^5}{5!}$, neboť $\cos \vartheta x \leq 1$. Omezme se např. na interval $\left\langle -\frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right\rangle$. Pro všechna x z tohoto intervalu $|R_5| \leq \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{10}\right)^5 = 1/12\,000\,000$.

Pro malé hodnoty x stačí psát $\sin x \doteq x$, popř. $\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!}$.

Vyjádřeme 3° v obloukové míře:

$$x = \frac{2\pi}{360} \cdot 3 = \frac{\pi}{60} \doteq 0,052\,359\,878$$

Dále

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{60}\right)^3 \doteq 0,000\,023\,925,$$

takže podle (11)

$$\sin 3^\circ \doteq \frac{\pi}{60} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{60}\right)^3 \doteq 0,052\,335\,953$$

s chybou nejbí než

$$\frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{60}\right)^5 \doteq 3,3 \cdot 10^{-9}.$$

NEURČITÉ VÝRAZY. L'HOSPITALOVO PRAVIDLO.

Při vyjádření funkce $f(x)$ analytickým výrazem se může stát, že v určitém bodě ztrácí tento analytický výraz smysl a nabude některého z tvarů $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0° , ∞° , 1^∞ .

Neurčité výrazy typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ řešíme l'Hospitalovým pravidlem, ostatní typy převedeme na typ $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$.

Věta 13. (L'Hospitalovo pravidlo.) Nechť 1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$, 2. existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (vlastní nebo nevlastní).

Pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Poznámka 22. a) V případě, že $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) / \lim_{x \rightarrow a} g'(x)$ je opět neurčitý výraz typu $0/0$ nebo ∞/∞ , použijeme téhož pravidla znovu.

b) Ostatní typy neurčitých výrazů se upravují na tvary $0/0$ nebo ∞/∞ a pak se použije uvedeného pravidla.

Příklad 24. Vypočítejte $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$. Typ $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} &= \left\| \frac{0}{0} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos x(-\sin x)}{2x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot 2}{2} = 1. \end{aligned}$$

Příklad 25. Typ $\infty - \infty$ převedeme na typ $\frac{0}{0}$ sloučením $f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) &= \left\| \infty - \infty \right\| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\ln x} = \left\| \frac{0}{0} \right\| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x) = -1. \end{aligned}$$

Příklad 26. Typ 0^0 převedeme na $\frac{\infty}{\infty}$ úpravou $f^g = e^{g \cdot \ln f}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \left\| 0^0 \right\| = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \cdot \ln x} = e^L$$

$$\begin{aligned} \text{kde } L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x &= \left\| 0 \cdot (-\infty) \right\| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left\| \frac{-\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

Tedy $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1$.

V příkladu jsme použili vztahu $x = e^{\ln x}$ (plyne z definice logaritmu x jako čísla, kterým je nutno umocnit základ, abychom dostali x) a spojitosti exponenciální funkce,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} e^x = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} x}$$

Příklad 27. Pro n přirozené platí

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \left\| \frac{\infty}{\infty} \right\| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n \cdot x^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty.$$

Tento výsledek vyjadřujeme rčením, že pro $x \rightarrow +\infty$ roste exponenciální funkce rychleji než mocnina x^n pro libovolné přirozené x .

MONOTONNOST A EXTRÉMY FUNKCE

Definice 16. (Funkce monotonní na množině.) Funkci $f(x)$ nazýváme rostoucí [klesající] na množině D , jestliže

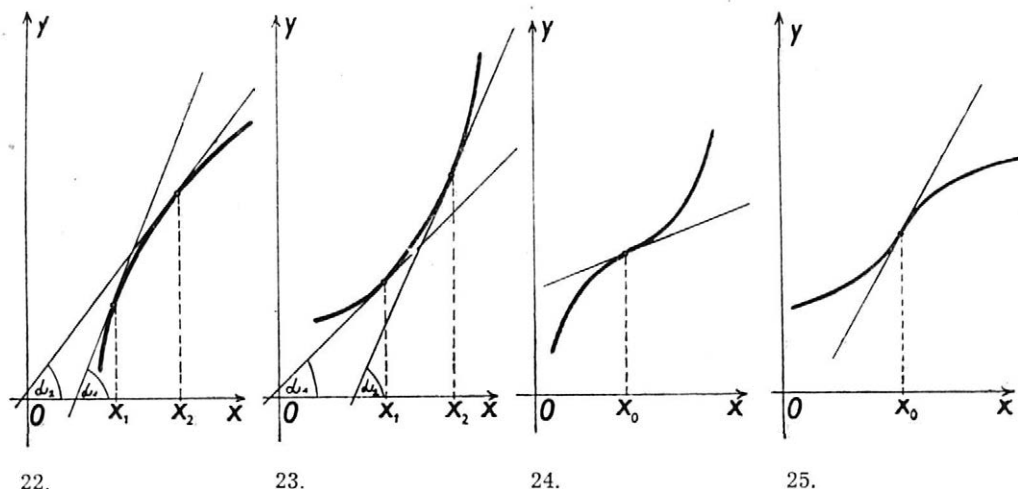
$$\forall x_1 \in D \wedge \forall x_2 \in D [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \{f(x_1) > f(x_2)\}].$$

Jestliže za stejných předpokladů platí neostře nerovnosti $f(x_1) \leq f(x_2)$ [$f(x_1) \geq f(x_2)$], hovoříme o neklesající [nerostoucí] funkci na množině D . Funkce rostoucí nebo klesající se nazývají ryze monotonní.

Definice 17. (Funkce monotonní v bodě.) Funkci $f(x)$ nazýváme rostoucí [klesající] v bodě x_0 , existuje-li takové okolí $O(x_0)$, že je v něm $f(x)$ rostoucí [klesající].

Věta 14. (Monotonnost a znamení derivace.) Necht $f(x)$ je spojitá na $\langle a, b \rangle$ a má v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Pak platí:

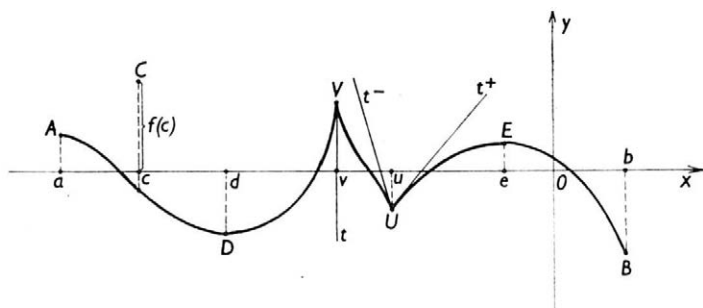
1. funkce $f(x)$ je konstantní na $\langle a, b \rangle$ právě tehdy, když $f'(x) = 0$ na (a, b) .
2. $f(x)$ je neklesající [nerostoucí] na $\langle a, b \rangle$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] na (a, b) .
3. Má-li $f(x)$ derivaci $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] na (a, b) , pak je na $\langle a, b \rangle$ rostoucí [klesající].



Poznámka 23. (Grafické znázornění základních typů rostoucích funkcí.) Funkce $y = f(x)$, pro níž $f'(x) > 0$, tzn. směrnice (tedy i směrové úhly) tečen vedených ke grafu funkce $y = f(x)$ jsou kladné (obr. 22–25). Analogická situace nastane u klesajících funkcí.

Dalším důležitým úkolem matematické analýzy je nalézt, zda má daná funkce takový bod x_0 , ve kterém nabývá největší nebo nejmenší hodnoty vzhledem k funkčním hodnotám v dostatečně malém okolí bodu x_0 .

Definice 18. (Lokální extrémy funkce.) Funkce $f(x)$ má v bodě $x_0 \in D(f)$ lokální minimum [lokální maximum] o hodnotě $f(x_0)$, existuje-li takové okolí $U(x_0)$, že pro všechna $x \in U(x_0)$ platí $f(x) > f(x_0)$ [$f(x) < f(x_0)$].



26.

Funkce $y = f(x)$ na obr. 26 nabývá lokálního maxima v bodech C, V, E , lokálního minima v bodech D, U .

Věta 15. (Nutná podmínka existence lokálního extrému.) Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální extrém, pak buď derivace $f'(x_0)$ neexistuje nebo existuje-li, je $f'(x_0) = 0$.

Definice 19. (Stacionární bod.) Má-li $f(x)$ v bodě x_0 derivaci a je-li $f'(x_0) = 0$, nazýváme bod $[x_0, f(x_0)]$ stacionárním bodem funkce $f(x)$.

Poznámka 24. V bodech C, U, V na obr. 26 derivace funkce $f(x)$ neexistuje, zatímco D, E jsou stacionární body, v nichž $f'(d) = f'(e) = 0$.

Poznámka 25. Obrácená věta k větě 15 neplatí, tzn., platí-li $f'(x_0) = 0$, nemusí mít $f(x)$ v x_0 lokální extrém (např. $y = x^3$ v $x_0 = 0$).

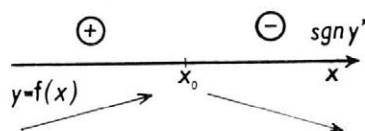
Příklad 28. Funkce $y = x^2 + 2x + 3$ má extrém ve stacionárním bodě $x_0 = -1$, v němž $y' \equiv 2x_0 + 2 = 0$. V bodě $x_0 = -1$ nastává lokální minimum, neboť pro $\forall x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -1$ platí $x^2 + 2x + 3 > 2$, tj. $(x+1)^2 > 0$. Grafem dané funkce je parabola o rovnici $y - 2 = (x+1)^2$ s vrcholem v bodě $V[-1; 2]$.

Příklad 29. V bodě $[0, 0]$ funkce $f(x) = |x|$ nemá derivaci $f'(0)$ (viz poznámka 15). V okolí $U(0)$ počátku je $f(x) > f(0) = 0$ pro $x \neq 0$. Tedy funkce $f(x) = |x|$ nabývá v bodě $x_0 = 0$ lokálního minima (obr. 16).

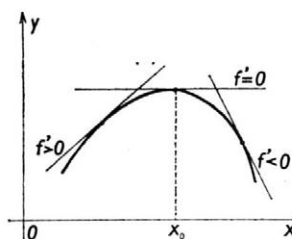
Věta 16. (Postačující podmínka pro existenci extrému.) Nechť x_0 je stacionární bod funkce $f(x)$, popř. bod, v němž neexistuje derivace $f'(x_0)$.

Je-li $f'(x) < 0$ [$f'(x) > 0$] v levém okolí $U^-(x_0)$ bodu x_0 a $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] v pravém okolí $U^+(x_0)$ bodu x_0 (neboli $f'(x)$ mění v bodě x_0 znaménko), pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 lokální minimum [lokální maximum].

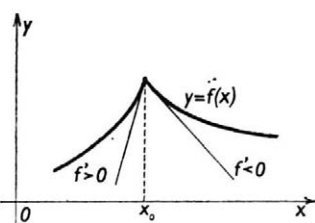
Schematický obrázek pro maximum:



Geometrická interpretace věty 16 pro lokální maximum je podána na obr. 27 a 28. V prvním případě $f'(x_0)$ existuje [tečna grafu funkce je rovnoběžná s osou x], na druhém obrázku $f'(x_0)$ neexistuje.



27.



28.

Definice 20. (Absolutní extrém funkce.) Absolutním minimem [maximum] funkce $f(x)$ v množině $D \subset D(f)$ rozumíme nejmenší [největší] z funkčních hodnot funkce $f(x)$ v D .

Poznámka 26. Absolutní extrém funkce $f(x)$ v $\langle a, b \rangle$ může nastat 1. v krajních bodech $\langle a, b \rangle$ nebo 2. ve vnitřních bodech $\langle a, b \rangle$, v nichž má $f(x)$ lokální extrém. Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 n spojitých derivací, i když několik prvních derivací je nulových, o existenci extrému snadno rozhodne tato věta.

Věta 17. (Vyšší derivace a extrém.) Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \geq 1$. Pak je-li

- a) n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$ má $f(x)$ v x_0 lokální minimum,
- b) n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$ má $f(x)$ v x_0 lokální maximum,
- c) n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$ je $f(x)$ v x_0 rostoucí,
- d) n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0$ je $f(x)$ v x_0 klesající.

Příklad 30. Vyšetřete lokální extrémy funkce $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$.

1. Vypočteme 1. a 2. derivaci $y' = 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x$

$$y'' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} - 2$$

2. Stacionární body: $y' = 0$, tj. $2(x^{-\frac{1}{3}} - x) = 0$

$$1 - x^{\frac{4}{3}} = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$$

Existují stacionární body $S_1[-1, 2]$, $S_2[1, 2]$.

3. Dle věty 17 odhadněme znaménko $f''(x)$ v S_1, S_2 :

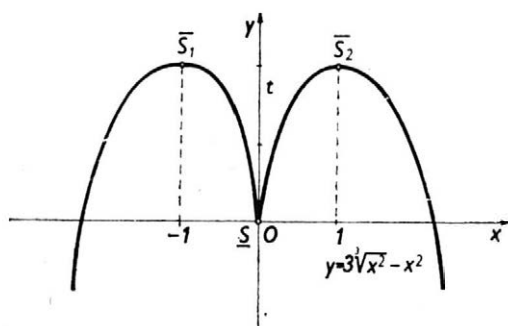
$$\left. \begin{aligned} f''_{S_1} &= f''(-1) = -\frac{8}{3} < 0 \\ f''_{S_2} &= f''(1) = -\frac{8}{3} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{v } \bar{S}_1, \bar{S}_2 \text{ nastane lokální maximum.}$$

4. Pro $x = 0$ není funkce y' definovaná, avšak v bodě $x = 0$ jednostranné derivace

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - x \right) = -\infty$$

mají opačná znaménka. Tedy podle věty 16 v bodě $S[0; 0]$ funkce nabývá lokálního minima (tzv. bod vratu) (obr. 29).



29.

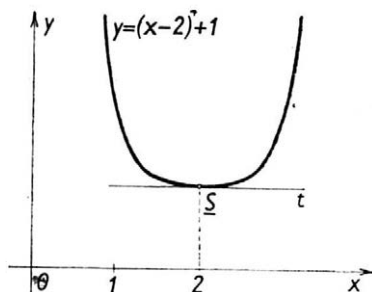
Příklad 31. Najděte extrém funkce $y = (x - 2)^4 + 1$. Stacionární body dostaneme řešením rovnice

$$y' = 0, \text{ tj. } 4(x - 2)^3 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = 2.$$

$$y'' = 12(x - 2)^2 \Rightarrow y''(2) = 0$$

$$y''' = 24(x - 2) \Rightarrow y'''(2) = 0$$

$$y^{(4)} = 24 \Rightarrow y^{(4)}(2) = 24 > 0.$$



30.

Podle věty 17 nastane v bodě $S[2; 1]$ lokální minimum (obr. 30).

Příklad 32. Z kmene se má vyřezat trám obdélníkového profilu o největší nosnosti. Stanovte rozměry průřezu.

Řešení: Nosnost N obdélníkového trámu je úměrná součinu $z \cdot v^2$, kde z je základna a v výška průřezu trámu, tj. $N = k \cdot z \cdot v^2$, $k = \text{konst.} > 0$. Máme tedy vepsat do kruhu

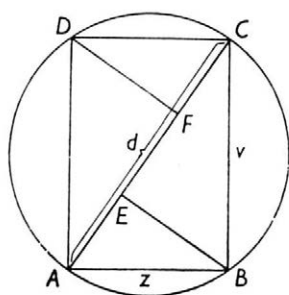
o průměru d takový obdélník, aby součin základny a čtverce výšky byl co největší (obr. 31). Podle Pythagorovy věty platí $v^2 = d^2 - z^2$; $N = k \cdot z(d^2 - z^2) = k(zd^2 - z^3)$ pro $z \in \langle 0, d \rangle$. Derivaci funkce N položíme rovnu nule, tj. $N' = k(d^2 - 3z^2) = 0$; odtud plyne, že daná funkce má dva stacionární body $z_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$, $z_2 = -\frac{d}{\sqrt{3}}$. Praktický

význam má pouze první bod. Dále je $N'' = k(-6z)$; $N''\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right) < 0$. Má tedy daná funkce ve stacionárním bodě $z = \frac{d}{\sqrt{3}}$ maximum. Úsečku AC (tj. libovolný průměr)

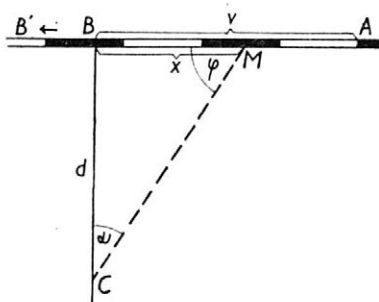
rozdělíme body E, F na tři stejné díly. V bodech E, F sestrojíme kolmice na AC . Průsečíky B, D těchto kolmic s kružnicí jsou další dva body obdélníka. Podle Euklidovy věty platí $z^2 = \overline{AC} \cdot \overline{AE} = d \cdot \frac{d}{3} = \frac{d^2}{3}$; tj. $z = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Dále je

$$v = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d \sqrt{\frac{2}{3}},$$

takže $z : v = 1 : \sqrt{2} \doteq 5 : 7 \doteq 7 : 10$.



31.



32.

Příklad 33. Ze skladu C je třeba přepravit materiál ze závodu A , ležícího na přímé železniční trati, spojující místa A a B' . Vzdálenost skladu C od železniční trati je rovna d km. Automobilová doprava je m -krát dražší než železniční. Určete polohu překladiště M na železniční trati tak, aby náklady na přepravu byly co nejmenší.

Řešení. Označme B patu kolmice spuštěné z bodu C na přímku AB' , v vzdálenost závodu A od místa B a φ úhel, který svírá příjezdová cesta CM s železniční trati. Položme $BM = x$, $\alpha = 90^\circ - \varphi$; (obr. 32). Za předpokladu, že v je dostatečně velké, můžeme zanedbat náklady na překládku a jiné vedlejší výdaje. Železniční přeprava 1 t materiálu na 1 km činí k Kčs. Celkové náklady na přepravu činí: $N = k(v - x + m\sqrt{d^2 + x^2})$, $k = \text{konst.}$

Stanovme stacionární body. $N' = k\left(-1 + \frac{mx}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right)$. Z rovnice $N' = 0$ plyne $mx = \sqrt{d^2 + x^2} \Rightarrow m^2x^2 = d^2 + x^2 \Rightarrow x = d/\sqrt{m^2 - 1}$.

Protože $N''(x) = md^2 \cdot (d^2 + x^2)^{-3/2}$ je $N''\left(\frac{d}{\sqrt{m^2 - 1}}\right) > 0 \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{m^2 - 1}}$

nastane minimum, které nezávisí na vzdálenosti v , což znamená, že pro všechny závody na železniční trati vpravo od překladiště M je jeho poloha na trati stejná. Silnici k překladišti je zapotřebí vybudovat tak, aby svírala se železniční tratí úhel φ , pro nějž platí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{x} = \sqrt{m^2 - 1}.$$

KONVEXNOST A KONKÁVNOST. INFLEXNÍ BOD

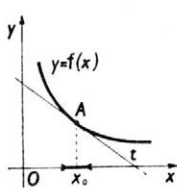
K výstižnější charakteristice funkce a jejího grafu je účelné zavést pojem vypuklé (konvexní) a vyduté (konkávni) funkce.

Definice 21. (Konvexní a konkávni funkce.)

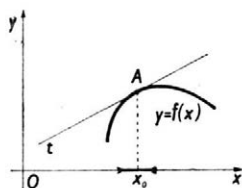
1. Funkci $f(x)$ mající v bodě x_0 derivaci, nazveme konvexní [konkávni] v bodě x_0 , existuje-li okolí $U(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in U(x_0)$ leží body grafu funkce $f(x)$ nad [pod] tečnou, sestrojenou v bodě $[x_0, f(x_0)]$, tj. platí $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ [$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$].

2. Funkce $f(x)$ je konvexní [konkávni] v intervalu $I \subset D(f)$, když je konvexní [konkávni] v každém bodě $x \in I$.

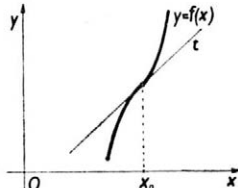
Poznámka 27. Na obr. 33 je znázorněn graf funkce konvexní, na obr. 34 graf funkce konkávni. V bodech konkávniho oblouku s rostoucím x klesá směrnice tečny $\operatorname{tg} \varphi = f'(x)$, v bodech konvexního oblouku tato směrnice roste. Platí tedy věta 18.



33.



34.



35.

Věta 18. (Postačující podmínka konvexnosti a konkávniosti funkce.) Má-li funkce $f(x)$ v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a; b \rangle$ $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$], pak funkce je konvexní [konkávni] v každém vnitřním bodě tohoto intervalu.

Definice 22. (Inflexní bod.) Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 derivaci a přechází-li v bodě x_0 graf funkce z jedné strany na druhou strany tečny, nazveme bod x_0 inflexním bodem funkce $f(x)$ (obr. 35).

Má-li funkce $f(x)$ druhou derivaci, usnadní nám určení inflexního bodu věta 19.

Věta 19. (Nutná podmínka pro existenci inflexního bodu.) Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod a má-li v tomto bodě druhou derivaci, pak platí $f''(x_0) = 0$.

Věta 20. (Postačující podmínka pro existenci inflexního bodu.) Nechtě funkce $f(x)$ má v bodě x_0 spojitou derivaci. Je-li $f''(x) < 0$ [$f''(x) > 0$] v levém okolí $U^-(x_0)$ bodu x_0 , $f''(x) > 0$ [$f''(x) < 0$] v pravém okolí $U^+(x_0)$ bodu x_0 (neboli $f''(x)$ mění v bodě x_0 zna-

ménko), pak funkce $f(x)$ má v bodě x_0 inflexní bod a přechází v něm z konkavity do konvexity [z konvexity do konkavity].

Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 n spojitých derivací ($n \geq 2$), i když několik prvních může být nulových, o existenci inflexního bodu rozhodne věta 21 analogická větě 17.

Věta 21. (Vyšší derivace a inflexní bod.) Necht' $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, $n \geq 2$. Pak je-li

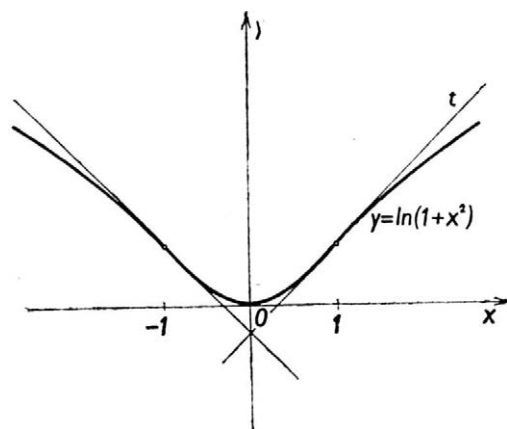
- n liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$, má $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod s přechodem z konkavity do konvexity,
- je-li n liché a $f^{(n)}(x_0) < 0$, má $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod s přechodem z konvexity do konkavity,
- je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, je $f(x)$ v bodě x_0 konvexní,
- je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, je $f(x)$ v bodě x_0 konkávní.

Příklad 34. Najděte inflexní body funkce $y = \ln(1 + x^2)$. Hledáme čísla, v nichž je druhá derivace rovna nule.

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$y'' = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

Druhá derivace $y''(x) > 0$ na intervalech $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ (tj. intervaly konkavity) a $y''(x) < 0$ na $(-1, 1)$ (tj. interval konvexity). Tedy podle věty 20 má daná funkce v $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$ inflexní body, neboť v nich nastává znaménková změna druhé derivace. V bodě $x_1 = 1$ nastává přechod z konvexity do konkavity, v $x_2 = -1$ nastává opačný přechod (obr. 36).



36.

Příklad 35. Určete inflexní body funkce $y = x^5$. Tato funkce má derivace všech řádů. Inflexní body získáme řešením rovnice $y'' = 0$, tj. $20x^3 = 0 \Rightarrow x_{1,2,3} = 0$. $y'''(0) = y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)}(0) = 120 > 0$. Podle věty 21 bod $I(0, 0)$ je inflexním bodem, v němž funkce $y = x^5$ přechází z konkavity do konvexity.

Chceme-li získat úplnější názor na průběh funkce v okolí nevlastních bodů a v okolí bodů nespojitosti, určíme její asymptoty, pokud existují.

Definice 22. (Asymptota.) Nechť bod T je bodem rovinné křivky $y = f(x)$ a p je přímka. Nechť v je vzdálenost bodu T od přímky p . Je-li $\lim v = 0$ v případě, že aspoň jedna souřadnice bodu T roste nade všechny meze, pak přímku p nazýváme asymptotou křivky.

Poznámka 28. Pro praktický výpočet rozlišujeme dva typy asymptot: a) rovnoběžné s osou y (vertikální), b) různoběžné s osou y .

Věta 22. (Asymptota rovnoběžná s osou y .) Přímka $x = x_0$ je asymptotou rovnoběžnou s osou y (vertikální) grafu funkce $y = f(x)$, jestliže má funkce $f(x)$ v bodě x_0 nevlastní limitu zprava nebo zleva, tzn. platí-li aspoň jeden ze 4 vztahů

$$\lim f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \text{ pro } x \rightarrow x_0^+ \text{ nebo pro } x \rightarrow x_0^-$$

Věta 23. (Asymptota různoběžná s osou y .) Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce $y = f(x)$ právě tehdy, existují-li vlastní limity $k = \lim \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim [f(x) - kx]$ pro $x \rightarrow \infty$ nebo pro $x \rightarrow -\infty$.

PRŮBĚH FUNKCE

Poznámka 29. Při vyšetřování průběhu grafu funkce obvykle zjišťujeme:

1. definiční obor;
2. spojitost, lichost, sudost, periodičnost;
3. průsečíky grafu s osami souřadnic (tzn. s osou x řešením soustavy rovnic $y = f(x)$, $y = 0$; s osou y řešením soustavy rovnic $y = f(x)$, $x = 0$), (intervaly, kde jsou funkční hodnoty kladné, záporné);
4. chování funkce v krajních bodech definičního oboru a v bodech nespojitosti;
5. asymptoty;
6. lokální extrémy (intervaly monotonnosti);
7. inflexní body (intervaly konvexity, konkavity);
8. sestrojení grafu, popř. určení dalších bodů vyšetřované křivky pro přesnější narysování grafu.

Poznámka 30. Body, které v uvedeném postupu nemají smysl, vynecháváme, např. asymptoty u mnohočlenů, sudost u funkce mající definiční obor nesouměrný podle počátku apod.

Příklad 36. Vyšetřete průběh funkce $y = \frac{x^2}{x-1}$

Řešení: 1. $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

2. Funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická.

3. Průsečíkem s osou x je bod $[0, 0]$.

4. Bod $x = 1$ je bodem nespojitosti, neboť

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2}{x-1} = \left\| x = 1 + \delta \right\|_{\delta \rightarrow 0} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(1+\delta)^2}{1+\delta-1} = +\infty,$$

podobně

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1} = +\infty$$

a podobně

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

5. a) Asymptoty různoběžné s osou $y : y = kx + q$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x}{2x-1} = 1,$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

tedy

$$y = x + 1.$$

b) Asymptota rovnoběžná s osou y má rovnici $x = 1$, neboť podle odst. 4.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty.$$

6. Určíme derivace:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \quad y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Z rovnice $y' = 0$ plyne $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$.

$y''(0) = -2 < 0 \Rightarrow \bar{S}_1[0,0]$ je lokální maximum.

$y''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{S}_2[2,4]$ je lokální minimum.

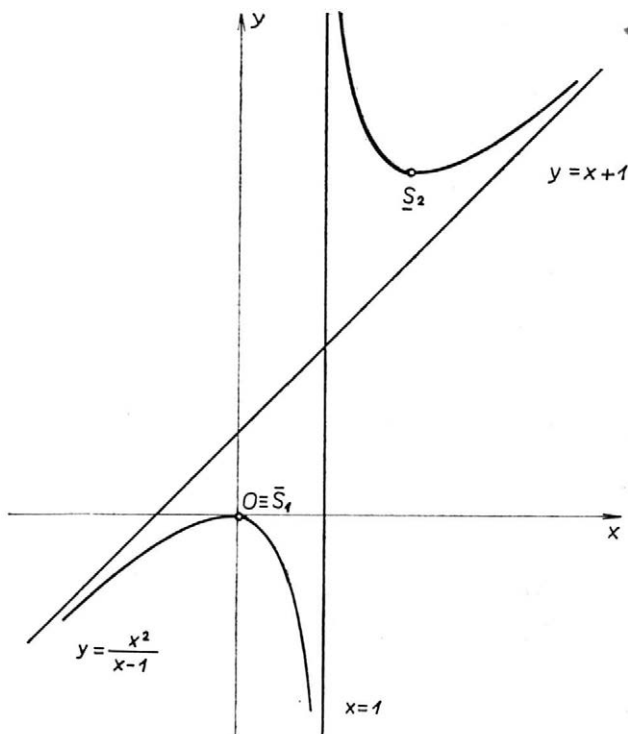
7. Z rovnice $y'' = 0 \Rightarrow$ neexistuje inflexní bod.

Graf funkce je nakreslen na obr. 37.

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

V dosavadních úvahách jsme se zabývali funkcemi jedné reálné proměnné. V řadě teoretických i praktických problémů se setkáváme s veličinami závislými na několika nezávisle proměnných. Např. objem válce závisí na velikosti poloměru a výšce válce. Kinetická energie je veličina závislá na hmotě a rychlosti pohybujícího se tělesa.

V této kapitole budeme studovat funkce dvou i více nezávisle proměnných, diferenciální počet těchto funkcí a jeho aplikace. Řada pojmů, definic a vět je analogických jako u funkcí jedné proměnné.



37.

VÍCEROZMĚRNÝ PROSTOR

Množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel $[x, y]$ nazýváme rovinou nebo dvojrozměrným prostorem R^2 , trojic $[x, y, z]$ trojrozměrným prostorem R^3 , ..., uspořádané n -tice $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ tvoří n -rozměrný prostor R^n . Libovolná neprázdná množina $M \subset R^n$ se nazývá obor.

Pojem okolí bodu je znám z kapitoly I., rozšíření lze provést následujícím způsobem, např. pro $n = 2$:

Definice 1. (δ -okolí bodu P_0). [Ryzí] δ -okolí bodu $P_0[x_0, y_0]$ je množina všech bodů $[x, y]$, ležících uvnitř kruhu o středu P_0 a poloměru δ [s výjimkou bodu P_0], tj. množina $O(P_0; \delta) = \{[x, y] \in R^2; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \wedge \delta \in R^+\}$ [$U(P_0; \delta) = O(P_0; \delta) - \{P_0\} = \{[x, y] \in R^2; 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \wedge \delta \in R^+\}$].

Vedle takto definovaného okolí (tzv. kruhového) se zavádí i tzv. čtvercové okolí. Např. ryzí čtvercové δ -okolí bodu P_0 je definováno jako množina $U(P_0, \delta) = \{[x, y] \in R^2; (0 < |x - x_0| < \delta) \wedge (0 < |y - y_0| < \delta) \wedge \delta \in R^+\}$.

Definice 2. Buď $M \subset R^2$. Bod $P \in M$ je vnitřním bodem množiny M , existuje-li takové δ -okolí bodu P , že všechny body z tohoto okolí patří do M .

Definice 3. Bod H se nazývá hraniční bod množiny M , jestliže v každém jeho δ -okolí leží aspoň jeden bod z M a aspoň jeden bod, který nepatří do množiny M . Množina všech hraničních bodů se nazývá hranice množiny M .

Definice 4. Množina M se nazývá otevřená, je-li každý její bod bodem vnitřním. Obsahuje-li M i hranici, nazývá se uzavřená.

Definice 5. Otevřená množina M se nazývá souvislá, lze-li každé její dva body spojit lomenou čarou (tj. čarou složenou z konečného počtu úseček), která celá leží v M . Otevřená souvislá množina se nazývá oblast.

Příklad 1. Příkladem oblasti je vnitřek elipsy, celá rovina R^2 ; příkladem uzavřené množiny je kruh s hraniční kružnicí apod.

FUNKCE

Definice 6. (Funkce n proměnných.) Zobrazením f množiny $D(f) \subset R^n$ do množiny reálných čísel R nazýváme reálnou funkcí n nezávisle proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ a značíme $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Pro $n = 2$ značíme obvykle $z = f(x, y)$, pro $n = 3$ $u = f(x, y, z)$. Symbolický zápis funkce:

$$f = \{[x_1, x_2, \dots, x_n, y] \in D(f) \times H(f) \wedge y = f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

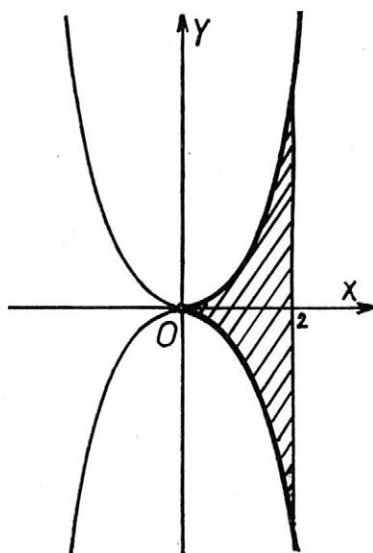
Poznámka 1. Množinu $D(f) = \{[x_1, x_2, \dots, x_n] \in R^n; \exists^* y \in R \text{ tak, že } [x_1, x_2, \dots, x_n, y] \in f\}$ nazýváme definičním oborem funkce, množinu $H(f) = \{y \in R; \exists [x_1, x_2, \dots, x_n] \in R^n \text{ tak, že } [x_1, \dots, x_n, y] \in f\}$ nazýváme množinu funkčních hodnot. Nejsou-li množiny $D(f)$ a $H(f)$ uvedeny, považujeme za definiční obor $D(f)$ funkce f množinu všech uspořádaných n -tic $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, pro něž má symbol $f(x_1, \dots, x_n)$ smysl.

Příklad 2. Definiční obor funkce $z = \arcsin \frac{y}{x^2} + \arcsin(1 - x)$ určíme řešením podmínek:

$$\left(-1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 1\right) \wedge (x \neq 0) \wedge (-1 \leq 1 - x \leq 1) \Rightarrow$$

$$D(f) = \{[x, y] \in R^2; (y \geq -x^2) \wedge (y \leq x^2) \wedge (x > 0) \wedge (x \leq 2)\}.$$

Definiční obor je znázorněn na obr. 38.



Další úvahy budeme provádět pro $n = 2$; pro $n > 2$ veškeré pojmy a definice lze zavést analogicky.

Definice 7. (Graf funkce.) Graf funkce $z = f(x, y)$, definované na $D(f)$, je množina G všech bodů o kartézských souřadnicích $[x, y, f(x, y)]$ pro $[x, y] \in D(f)$ neboli $G = \{[x, y, z] \in R^3; [x, y] \in D(f) \wedge z \in H(f)\}$.

Poznámka 2. a) Orthogonální průmět grafu funkce $z = f(x, y)$ do roviny XY je $D(f)$.

b) Každá přímka rovnoběžná s osou Z protíná graf nejvýše v jednom bodě.

c) K upřesnění představy o grafu funkce $z = f(x, y)$ v prostoru užíváme tzv. vrstevnic plochy $z = f(x, y)$. Vrstevnicemi rozumíme soustavu čar $f(x, y) = C$ v rovině $z = 0$. Volíme-li např. čísla $C = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, jimiž (jako kótami) vrstevnice popisujeme, pak hustota vrstevnic je měřítkem spádu plochy. V místech, kde vrstevnice jsou hustě u sebe, je sklon plochy příkrý. V praxi se uvedených úvah využívá při řešení lesních cest, železnic, lanovek, při hledání optimálních spádových poměrů, při hrazení bystřin, geodetických zaměřováních aj.

Poznámka 3. Funkci $z = F(g(x, y), h(x, y))$ nazýváme složenou funkcí skládající se z funkcí $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, $z = F(u, v)$. Přitom funkce g, h jsou definovány na M , funkce F na N tak, aby pro každý bod $[x, y] \in M$ platilo $[u, v] \in N$.

LIMITA A SPOJITOST FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Definice 8. (Limita funkce.) Funkce $z = f(x, y)$ definovaná v okolí U bodu P_0 , má v bodě $P_0[x_0, y_0]$ limitu rovnou číslu L právě tehdy, když ke každému ε -okolí $O(L, \varepsilon)$ čísla L existuje ryzí okolí $U(P_0, \delta) \subset U$ bodu P_0 tak, že $f(x, y) \in O(L, \varepsilon)$ pro všechny body $P[x, y] \in U(P_0, \delta)$ a zapisujeme:

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y) = L \quad \text{nebo} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(x, y) = L$$

Symbolický zápis:

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta \in R^+ \forall [x, y] \in U[[x, y] \in U(P_0, \delta) \Rightarrow z \in O(L, \varepsilon)]$$

nebo

$$\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta \in R^+ \forall [x, y] \in U[0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon].$$

Poznámka 4. a) Symbol $[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]$ vyjadřuje, že bod $P[x, y]$ se blíží k bodu $P_0[x_0, y_0]$ po libovolné cestě, tj. x se blíží k x_0 a současně y k y_0 navzájem nezávisle. Pak funkční hodnota $f(x, y)$ se blíží k číslu L neboli $f(x, y)$ má hodnotu dosti blízkou hodnotě L pro všechny body P blízké bodu P_0 .

b) Definice limity nepoužívá hodnoty $f(x_0, y_0)$, limita L může existovat, i když funkční hodnota $f(x_0, y_0)$ není definována. Tedy u limity nezáleží na hodnotě $f(x, y)$ v bodě P_0 .

Poznámka 5. (Operace s limitami.) Výpočet limit funkcí více proměnných je obtížný. Platí však rovněž věty jako pro funkci jedné proměnné (viz věta 1), např.

$$1. \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) \pm g(P)] = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \pm \lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$$

$$2. \lim_{P \rightarrow P_0} [f(P) \cdot g(P)] = \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) \cdot \lim_{P \rightarrow P_0} g(P)$$

$$3. \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{\lim_{P \rightarrow P_0} f(P)}{\lim_{P \rightarrow P_0} g(P)} \text{ pro } P \rightarrow P_0 \wedge \lim_{P \rightarrow P_0} g(P) \neq 0 \text{ apod.}$$

Poznámka 6. (Postupná, opakovaná limita.) Od definované limity (zvané dvojné) nutno rozlišovat tzv. dvojnásobnou (postupnou) limitu $f(x, y)$ v bodě P_0 . Dvojnásobnou limitu funkce $f(x, y)$ vypočteme postupným limitním přechodem vždy funkce jedné proměnné (druhou proměnnou považujeme za konstantu) a píšeme

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow y_0} [\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)]; \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} [\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)].$$

Geometrický význam: u L_1 se bod P nejprve blíží do bodu $[x_0, y]$ po rovnoběžce s osou X a potom po rovnoběžce s osou Y do bodu $[x_0, y_0]$. Neuvažuje se tedy celé okolí bodu P_0 , ale jen body na přímkách $x = x_0$ a $y = y_0$ blízké bodu P_0 . Platí však užitečná věta.

Věta 1. Existují-li limity L_1, L_2, L , pak platí $L_1 = L_2 = L$. Avšak existuje-li L_1, L_2 a $L_1 \neq L_2$, pak L neexistuje.

Příklad 3.

Limita
$$L = \lim_{[x, y] \rightarrow [1, 2]} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \text{ neexistuje,}$$
 neboť

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow 2} \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right] = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 - 4}{y^4 - 16} = \lim_{y \rightarrow 2} \frac{1}{y^2 + 4} = \frac{1}{8}$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\lim_{y \rightarrow 2} \frac{x^2 y^2 - 4}{x^4 + y^4 - 17} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{x^4 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x^2 + 1} = 2$$

Tedy $L_1 \neq L_2$ a limita L neexistuje.

Definice 9. (Spojitost funkce.) Funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě $P_0[x_0, y_0]$, když

1. existuje číslo $f(x_0, y_0)$ [funkce $f(x, y)$ je v P_0 definována],
2. existuje vlastní limita funkce $f(x, y)$ v bodě P_0 a je rovna funkční hodnotě $f(x_0, y_0)$ v tomto bodě, tj. platí

$$\lim_{[x, y] \rightarrow [x_0, y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Poznámka 7. Definici spojitosti dostaneme z definice limity takto:

- a) číslo L nahradíme hodnotou $f(x_0, y_0)$,
- b) místo ryzího δ -okolí bodu P_0 , tj. $U(P_0, \delta)$, uvažujeme δ -okolí $O(P_0, \delta)$, tj. množinu včetně bodu P_0 .

PARCIÁLNÍ DERIVACE

Definice 10. (Parciální derivace.) Nechť funkce $z = f(x, y)$ je definována v oblasti M a $P_0[x_0, y_0] \in M$.

Má-li funkce $g(x) = f(x, y_0)$ jedné proměnné x v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$, nazýváme ji parciální derivací 1. řádu funkce $f(x, y)$ podle x v bodě P_0 a značíme

$$f'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \quad z'_x(x_0, y_0).$$

Tedy platí

$$f'_x(P_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

kde $\Delta x = x - x_0$ je přírůstek proměnné x .

Analogicky se definuje parciální derivace $f(x, y)$ podle y jako derivace funkce $h(y) = f(x_0, y)$, i parciální derivace funkcí více proměnných.

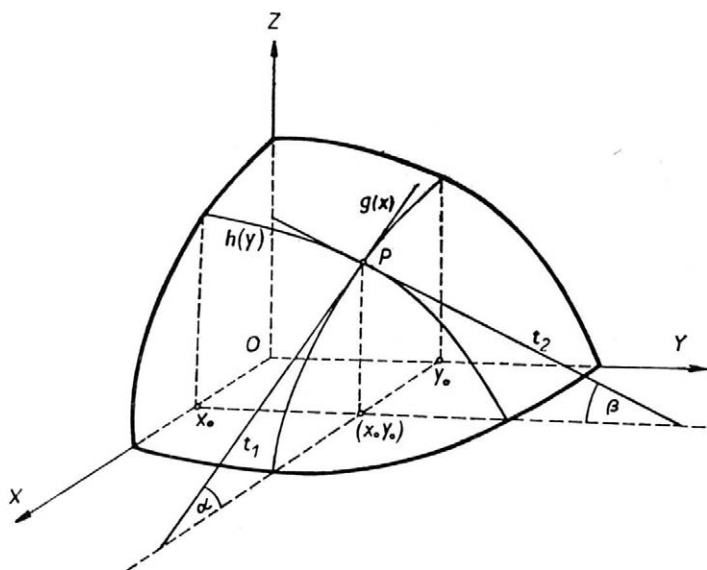
Příklad 4. Parciální derivace funkce $u = \ln(x^2 + y^3 + z^4)$ jsou:

$$u'_x = \frac{2x}{x^2 + y^3 + z^4}; \quad u'_y = \frac{3y^2}{x^2 + y^3 + z^4}; \quad u'_z = \frac{4z^3}{x^2 + y^3 + z^4}$$

Příklad 5. Funkce $z = x^y$ ($x > 0$) má parciální derivace 1. řádu:

$$z'_x = y \cdot x^{y-1}, \quad z'_y = x^y \cdot \ln x.$$

Poznámka 8. (Geometrický význam prvních parciálních derivací.) Z analogie geometrického významu derivace funkce jedné proměnné plyne, že $f'_x(x_0, y_0)$ $\{f'_y(x_0, y_0)\}$ značí směrnici tečny $t_1 \{t_2\}$, sestrojené v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ ke křivce $g(x) = f(x, y_0) \wedge y = y_0$, tj. $\text{tg } \alpha = f'_x(x_0, y_0)$ $\{$ ke křivce $h(y) = f(x_0, y) \wedge x = x_0$, tj. $\text{tg } \beta = f'_y(x_0, y_0)\}$ (obr. 39).



Poznámka 9. (Vyšší derivace.) $\delta f/\delta x$, $\delta f/\delta y$ jsou obecně opět funkce proměnných x, y . Derivace druhého řádu jsou definovány vztahy:

$$1. f''_{xx} = \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right) \quad (\text{derivována dvakrát podle } x)$$

$$2. f''_{yy} = \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta f}{\delta y} \right) \quad (\text{derivováno dvakrát podle } y)$$

$$3. f''_{xy} = \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta}{\delta y} \left(\frac{\delta f}{\delta x} \right) \quad (\text{derivováno podle } x \text{ a podle } y)$$

$$4. f''_{yx} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} = \frac{\delta}{\delta x} \left(\frac{\delta f}{\delta y} \right) \quad (\text{derivováno podle } y \text{ a podle } x)$$

Pro smíšené derivace f''_{xy}, f''_{yx} platí Schwarzova věta 2.

Věta 2. (Záměnnost smíšených derivací.) Nechť funkce $f(x, y)$ má v okolí bodu $P[x, y]$ parciální derivace $f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$, které jsou v bodě P spojité, pak platí $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Jsou-li splněny podmínky Schwarzovy věty, lze při výpočtu druhých parciálních derivací zaměnit pořadí derivací (podle x a y).

Příklad 6. Pro funkci $z = y^2 \cdot \sin x$ jsou parciální derivace:

$$z'_x = y^2 \cdot \cos x \quad z'_y = 2y \cdot \sin x$$

$$z''_{xx} = -y^2 \cdot \sin x; \quad z''_{xy} = z''_{yx} = 2y \cdot \cos x; \quad z''_{yy} = 2 \cdot \sin x$$

Analogicky se definují druhé parciální derivace více proměnných a derivace vyšších řádů.

ÚPLNÝ (TOTÁLNÍ) DIFERENCIÁL

Změní-li se proměnné x, y o hodnoty $\Delta x, \Delta y$, pak příslušný přírůstek Δz funkce $z = f(x, y)$ nazveme totálním přírůstkem funkce z a platí

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (1)$$

U totálního přírůstku se mění současně obě nezávislé proměnné x, y (zatímco u parciálních derivací se měnila pouze jedna proměnná).

Definice 11. (Totální diferenciál.) Nechť funkce $f(x, y)$ má v bodě $[x, y]$ parciální derivace f'_x, f'_y , pak funkci $f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y$ dvou proměnných $\Delta x, \Delta y$ nazýváme totální diferenciál funkce z v bodě $[x, y]$. Značíme $dz, df(x, y)$. Tedy $dz = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y$, avšak pro $f(x, y) = x[y]$ plyne $dx = \Delta x [dy = \Delta y]$ neboli

$$dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy. \quad (2)$$

Někdy se $f'_x(x, y)dx [f'_y(x, y)dy]$ nazývá parciální diferenciál vzhledem k $x[y]$.

Poznámka 10. Podobně jako nahrazujeme u funkce jedné proměnné přírůstek funkce Δy diferenciálem dy , tak také přírůstek funkce Δz více proměnných lze nahradit totálním diferenciálem dz (geometricky přírůstek funkce nahrazujeme přírůstkem na tečné rovině), tj.

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z \doteq f(x, y) + dz. \quad (3)$$

Příklad 7. Určeme přibližně hodnotu výrazu $\sqrt[3]{1,02^3 + 1,97^3}$. Zvolíme $z = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ a určíme totální diferenciál v bodě $[1, 2]$ pro přírůstky $dx = 0,02$, $dy = -0,03$.

$$z'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt[3]{x^3 + y^3}} \quad z'_x(1, 2) = \frac{1}{2}$$

$$z'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt[3]{x^3 + y^3}} \quad z'_y(1, 2) = 2$$

Tedy dle (2) a (3) je:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1,02^3 + 1,97^3} &= f(1 + 0,02; 2 - 0,03) \doteq f(1, 2) + dz(1, 2) = \\ &= 3 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 + 2 \cdot (-0,03) = 2,95. \end{aligned}$$

Poznámka 11. Funkce $z = f(x, y)$, mající v daném bodě úplný diferenciál se nazývá diferencovatelná v tom bodě. Diferencovatelnost funkce v bodě zaručuje existenci prvních parciálních derivací v tomto bodě.

Poznámka 12. Podobně jako u funkce jedné proměnné značí veličina $|\Delta z| \doteq |dz|$ tzv. absolutní chybu, veličina $|\Delta z/z| = |\Delta f(x, y)/f(x, y)|$ tzv. relativní chybu výpočtu, kterou můžeme odhadnout výrazem $\left| \frac{dz}{z} \right| = \left| \frac{df(x, y)}{f(x, y)} \right|$ pro $f(x, y) \neq 0$.

Příklad 8. Poloměr podstavy kužele $r = 10,0 \pm 0,1$ cm a výška $v = 30,0 \pm 0,3$ cm. Vypočteme objem kužele V a chybu výpočtu $|\Delta V|$.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 v \Rightarrow V = \frac{1}{3} \pi 100 \cdot 30 = 1000\pi \text{ cm}^3$$

$$\begin{aligned} \Delta V \doteq dV &= V'_r \cdot dr + V'_v \cdot dv = \frac{2}{3} \pi r v dr + \frac{1}{3} \pi r^2 dv = \frac{1}{3} \pi (2 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 0,1 + \\ &+ 100 \cdot 0,3) = 30\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Tedy $V = \pi(1000 \pm 30) \text{ cm}^3$. Relativní chyba $\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \left| \frac{30\pi}{1000\pi} \right| = 3 \%$.

Věta 3. (Totální diferenciál vyšších řádů.) Necht funkce $z = f(x, y)$ má spojitě parciální derivace k -tého řádu. Pak k -tý diferenciál můžeme psát ve tvaru

$$d^k f(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y),$$

kde výraz na pravé straně symbolicky rozvineme podle binomické věty, přičemž mocniny nahrazujeme řádem příslušných parciálních derivací.

Pro $k = 2$:

$$d^2(x, y) = \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta x \delta y} dx dy + \frac{\delta^2 f(x, y)}{\delta y^2} (dy)^2.$$

Věta 4. (Derivace složených funkcí.) Necht' funkce $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$ jsou v bodě $P_0[x_0, y_0]$ diferencovatelné. Necht' funkce $z = F(u, v)$ je diferencovatelná v odpovídajícím bodě $[u_0, v_0]$ ($u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$). Pak složená funkce

$$z = F[g(x, y), h(x, y)]$$

je diferencovatelná (jako funkce proměnných x, y) v bodě P_0 a je

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\delta F}{\delta u} \cdot \frac{\delta g}{\delta x} + \frac{\delta F}{\delta v} \cdot \frac{\delta h}{\delta x} \quad \frac{\delta z}{\delta y} = \frac{\delta F}{\delta u} \cdot \frac{\delta g}{\delta y} + \frac{\delta F}{\delta v} \cdot \frac{\delta h}{\delta y}, \quad (4)$$

přičemž derivace funkcí g, h vyčíslíme v bodě $[x_0, y_0]$ a funkce F v bodě $[u_0, v_0]$.

Příklad 9. Mějme složenou funkci $y = u^v$, kde $u = 1 + x^2$, $v = \sin x$. Pak funkce $y = F[u, v] = f(x)$, tedy derivace je

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\delta F}{\delta u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\delta F}{\delta v} \cdot \frac{dv}{dx} = v \cdot u^{v-1} \cdot 2x + u^v \ln u \cdot \cos x = \\ &= (1 + x^2)^{\sin x} \left[\frac{2x \cdot \sin x}{1 + x^2} + \cos x \cdot \ln(1 + x^2) \right]. \end{aligned}$$

Poznámka 13. V příkladech bychom dospěli k témuž výsledku, kdybychom za u, v dosadili do funkce y a derivovali $y = f(x)$. Je-li však některá z funkcí F, g, h dána implicitně, nelze obecně toto dosazení provést. Pak je použití vzorců (4) nutné.

Definice 12. (Implicitní funkce.) Necht' je dána rovnice $F(x, y) = 0$. Říkáme, že funkce $y = f(x)$ je v oboru M řešením této rovnice, jestliže platí $F[x, f(x)] \equiv 0$ v M . Pak rovnici $F(x, y) = 0$ je implicitně zadána funkce $y = f(x)$.

Věta 5. (Derivace implicitních funkcí.) Necht' funkce $F(x, y)$, $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ jsou spojité v okolí bodu P_0 , přičemž $F(x_0, y_0) = 0$, ale $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak rovnice $F(x, y) = 0$ v nějakém okolí bodu P_0 definuje implicitně funkci $y = f(x)$, která je spojitá a její derivaci y' určíme z rovnice $F'_x + F'_y \cdot y' = 0$ neboli $y' = -F'_x/F'_y$. Analogicky pro y'' platí rovnice:

$$F''_{xx} + 2F''_{xy} \cdot y' + F''_{yy} \cdot y'^2 + F'_y \cdot y'' = 0,$$

odkud

$$y'' = - \frac{F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy} \cdot F'_x \cdot F'_y + F''_{yy}(F'_x)^2}{(F'_y)^3}$$

Příklad 10. Derivace y' funkce y dané implicitně rovnicí

$$x^2 + 2xy - y^2 - 10 = 0 \quad \text{je} \quad 2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0$$

neboli

$$y' = -\frac{x+y}{x-y}$$

za předpokladu, že

$$x - y \neq 0.$$

Věta 6. (Derivace v daném směru.) Nechť $\cos \alpha$, $\cos \beta$ jsou směrové kosiny orientované úsečky u spojující body $[x_0, y_0]$, $[x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y]$.

Označíme-li $s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ délku této úsečky, je $\Delta x = s \cdot \cos \alpha$, $\Delta y = s \cdot \cos \beta$. Limitu

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + s \cdot \cos \alpha, y_0 + s \cdot \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{s}$$

existuje-li, nazveme derivací funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ v daném směru $(\cos \alpha, \cos \beta)$ a značíme ji df/ds . Má-li funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 1. řádu, platí

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \cos \beta, \text{ pro } x = x_0, y = y_0.$$

Derivace funkce $f(x, y)$ v daném směru s určuje rychlost změny funkce f , přechází-li bod $P_0[x_0, y_0]$ po úsečce u do bodu $P[x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y]$.

TAYLORŮV ROZVOJ PRO FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Věta 7. (Taylorova věta.) Nechť $z = f(x, y)$ je v okolí bodu $P_0[x_0, y_0]$ $(n+1)$ -krát spojitě diferencovatelná. Pak v bodě $P[x, y] \in O(P_0)$ platí Taylorův vzorec

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} [f'_x(x_0, y_0) \Delta x + f'_y(x_0, y_0) \Delta y] + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0) (\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) \Delta x \cdot \Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0) (\Delta y)^2] + \dots + R_{n+1}, \quad (5)$$

kde zbytek Taylorova vzorce je tvaru

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \left[\Delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(\xi, \eta); \quad \xi \in (x_0, x), \eta \in (y_0, y).$$

Poznámka 14. V případě, že hledáme rozvoj funkce v okolí $[0, 0]$, v (5) položíme $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, dostaneme tzv. Maclaurinův vzorec.

Příklad 11. Určeme několik prvních členů Maclaurinova rozvoje funkce $f(x, y) = e^x \cdot \cos y$ (tzn. vypočteme rozvoj funkce v okolí bodu $[0, 0]$).

$$f = e^x \cos y, f'_x = e^x \cos y, f'_y = -e^x \sin y, f''_{xx} = e^x \cos y, f'_{xy} = -e^x \sin y, f''_{yy} = -e^x \cos y, f'''_{xxx} = e^x \cos y, f'''_{xxy} = -e^x \sin y, f'''_{xyy} = -e^x \cos y, f'''_{yyy} = e^x \sin y$$

v bodě $[0, 0]$ je $f = 1, f'_x = 1, f'_y = 0, f''_{xx} = 1, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = -1, f'''_{xxx} = 1,$

$$f'''_{xxy} = 0, f'''_{xyy} = -1, f'''_{yyy} = 0.$$

Tedy

$$f(x, y) = 1 + x + \frac{1}{2!}(x^2 - y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 - 3xy^2) + \dots$$

LOKÁLNÍ EXTREMY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

Definice 13. (Lokální extrémy.) Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $P_0[x_0, y_0]$ lokální maximum [lokální minimum], existuje-li δ -okolí bodu P_0 , že $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ [$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$] platí pro všechny body $P[x, y] \in O(P_0; \delta)$.

Geometrický význam: Je-li v bodě $P_0[x_0, y_0]$ lokální extrém a je-li tečná rovina v bodě $T_0[x_0, y_0, z_0]$ rovnoběžná s rovinou XY , pak část plochy $z = f(x, y)$ příslušné okolí bodu P_0 leží celá nad nebo pod tečnou rovinou. Z geometrického významu parciálních derivací 1. řádu plyne, že tyto derivace (pokud existují) v bodě P_0 se musí rovnat nule.

Věta 8. Má-li funkce $z = f(x, y)$ v nějakém okolí bodu P_0 parciální derivace 1. řádu, pak může lokálního extrému nabývat jen v takovém bodě $[x_0, y_0]$, zvaném stacionárním, v němž

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \wedge f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Nechť dále $f(x, y)$ v $O(P_0)$ má spojité parciální derivace 2. řádu.

Označme $D(x, y) = f''_{xx}(x, y) \cdot f''_{yy}(x, y) - [f''_{xy}(x, y)]^2$.

Pak 1. Je-li $D(x_0, y_0) > 0$, má $f(x, y)$ v P_0 lokální extrém a to pro $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ [> 0] lokální maximum [minimum].

2. Je-li $D(x_0, y_0) < 0$, $f(x, y)$ nemá v P_0 extrém.

3. Je-li $D(x_0, y_0) = 0$, $f(x, y)$ může a nemusí mít v P_0 extrém.

Poznámka 15. Příklad, kdy $D(x_0, y_0) = 0$ zkoumáme a) podle definice lokálního extrému, nebo b) užitím svazku přímek $y - y_0 = k(x - x_0)$, kdy vyšetřujeme danou funkci na přímkách jako funkci jedné proměnné x .

Poznámka 16. Při řešení slovních úloh vedoucích k určení extrému funkce, v mnohých konkrétních případech plyne z charakteru úlohy existence a druh extrému.

Příklad 12. Určete rozměry pravoúhlé vodní nádrže o daném objemu V [m³] tak, aby dno a stěny měly minimální povrch. Označme rozměry dna x, y , výšku nádrže z . Pak objem $V = xyz$, povrch dna a stěn $P = xy + 2xz + 2yz = f(x, y, z)$.

Vyjádříme $z = \frac{V}{xy}$ a dosadíme do $f(x, y, z)$ neboli $P(x, y) = xy + 2V\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)$

je funkcí dvou proměnných x, y ; V je konst. Hledáme extrém funkce $P(x, y)$, tzn. $P'_x = 0, P'_y = 0$:

$$y - \frac{2V}{x^2} = 0 \wedge x - \frac{2V}{y^2} = 0$$

neboli $x^2y = xy^2 = 2V$. Odtud $x = y = \sqrt[3]{2V}$, neboť $x = y = 0$ nemá smysl. Výška kvádry $z = \frac{V}{xy} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{2V}$.

Pro hledané rozměry platí $x : y : z = 2 : 2 : 1$.

Příklad 13. a) Funkce $f(x, y) = x^4 + y^4$ má v bodě $[0, 0]$ extrém, přestože $D(0, 0) = 0$. Dle definice lokálního minima je pro danou funkci splněna nerovnost $f(x, y) > f(0, 0)$ pro všechny body $[x, y]$ z okolí bodu $[0, 0]$, tedy $f(x, y)$ má v $[0, 0]$ lokální minimum.
b) Funkce $f(x, y) = x^3 + y^3$ nemá v bodě $[0, 0]$ extrém, protože v I. kvadrantu je stále kladná, ve III. záporná. Opět $D(0, 0) = 0$.

VÁZANÉ EXTRÉMY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

V praxi se často setkáváme s úlohou určit extrém funkce několika proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, které jsou vázány podmínkami (tzv. vazbami) $\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ pro $m < n$.

Definice 14. (Vázaný extrém.) Funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $P_0[x_0, y_0]$, pro který $\varphi(x_0, y_0) = 0$, vázané maximum [vázané minimum], platí-li $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ [$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$] pro všechny body křivky $\varphi(x, y) = 0$ z nějakého okolí bodu P_0 .

Poznámka 17. Rozdíl mezi lokálními a vázanými extrémy spočívá v tom, že při lokálních extrémech vyšetřujeme funkci $f(x, y)$ v celém jejím definičním oboru, zatímco při vázaných extrémech vyšetřujeme jen ty hodnoty funkce, kterých nabývá v bodech křivky o rovnici $\varphi(x, y) = 0$.

Poznámka 18. Dovedeme-li z podmínky $\varphi(x, y) = 0$ vypočítat y jako funkci x , dosadíme do $z = f(x, y)$, a tím redukuje problém vázaného extrému na problém nalezení extrému funkce jedné proměnné (př. 12). V ostatních případech užíváme tzv. Lagrangeovu metodu.

Věta 9. (Lagrangeova metoda.) Necht funkce $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$, zvaná Lagrangeova, splňuje pro čísla x_0, y_0, λ_0 soustavu rovnic $F'_x(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, F'_y(x_0, y_0, \lambda_0) = 0, \varphi(x_0, y_0) = 0$. Má-li funkce $F(x, y, \lambda_0)$ v bodě $P_0[x_0, y_0]$ lokální maximum [minimum] podle předcházející věty, pak funkce $z = f(x, y)$ má v P_0 vázané maximum [vázané minimum] při podmínce $\varphi(x, y) = 0$.

Příklad 14. Na přímce $x + 2y + 3 = 0$ určete bod $M[x, y]$, jehož součet čtverců vzdáleností od bodů $A[1, 1], B[2, 2]$ je nejmenší. Hledáme extrém funkce $f = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2$, což je $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$, při podmínce $\varphi(x, y) \equiv x + 2y + 3 = 0$. Tedy Lagrangeova funkce je

$$F(x, y, \lambda) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + \lambda(x + 2y + 3).$$

$$\text{Položme: } F'_x = 2(x - 1) + 2(x - 2) + \lambda = 0$$

$$F'_y = 2(y - 1) + 2(y - 2) + 2\lambda = 0$$

$$x + 2y + 3 = 0$$

Řešením této soustavy obdržíme $x = 0, y = -\frac{3}{2}, \lambda = 6$.

Tedy bod $P_0 \left[0, -\frac{3}{2} \right]$ má požadovanou vlastnost.

Analogicky se řeší extrémy funkcí více proměnných. U funkcí n -proměnných může být dáno nejvýše $(n - 1)$ podmínek.

Příklad 15. Určete rozměry kvádru maximálního objemu tak, aby délka jeho tělesové úhlopříčky se rovnala $2\sqrt{3}$. Tělesová úhlopříčka $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{3}$. Tedy podmínka $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 12$. Hledáme extrém funkce $f = xyz$ při podmínce $\varphi = 0$. Lagrangeova funkce F má tvar

$$F = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 12)$$

$$F'_x = yz + 2\lambda x = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{yz}{2x}$$

$$F'_y = xz + 2\lambda y = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xz}{2y}$$

$$F'_z = xy + 2\lambda z = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{xy}{2z}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0$$

Porovnáním rovnic pro λ plyne $x^2 = y^2 = z^2$. Dosazením do poslední rovnice dostaneme $x^2 = 4$. Praktický smysl má jen kořen $x = 2$ a dále $y = z = 2$. Tedy při dané délce úhlopříčky má největší objem krychle o hraně $a = 2$.

Literatura

1. Frank, L. a kol.: Matematika. Praha, SNTL 1973
2. Havlíček, K.: Diferenciální počet pro začátečníky. Praha, SNTL 1965
3. Kluvánek, I. — Mišík, L. — Švec, M.: Matematika I (1964), II (1961). Bratislava, SVTL
4. Rektorys, K.: Přehled užití matematiky. Praha, SNTL 1963
5. Šindelář, K.: Diferenciální počet funkcí více proměnných. Praha, SNTL 1972
6. Škrášek, J.: Základy vyšší matematiky IA, IB, IIA. Praha, SNTL 1970

Hana Vřešťalová, prom. mat., lesnická fakulta VŠZ, Brno

Podepsáno k tisku 18. 4. 1977.